

Traducción de preprint de: Araya, R. (2021) What Mathematical Thinking Skills will our Citizens Need in 20 More Years to Function Effectively in a Super Smart Society? In Inprasitha, M., Changsri, N., & Boonsena, N. (Eds). (2021). Proceedings of the 44<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol.1).

# **¿QUÉ HABILIDADES DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO NECESITARÁN NUESTROS CIUDADANOS EN 20 AÑOS MÁS PARA FUNCIONAR DE MANERA EFECTIVA EN UNA SOCIEDAD SÚPER INTELIGENTE?**

Roberto Araya

Instituto de Educación, CIAE, Universidad de Chile

*Las predicciones críticas para los próximos 20 años incluyen el cambio climático, nuevas pandemias y una creciente desigualdad. Estas predicciones deberían ayudarnos a imaginar las habilidades que necesitarán los estudiantes. Sin embargo, hay un cambio que tendrá un impacto aún mayor. Con el aprendizaje automático, las aplicaciones nos asesorarán y tomarán decisiones por nosotros. Sin embargo, las aplicaciones sirven principalmente a los intereses de terceros, a menudo conspirando y engañando a los usuarios. Peor aún, los mecanismos evolucionados de construcción de confianza cara a cara y basados en la reputación no están adaptados a este nuevo entorno. Esto representa un enorme desajuste evolutivo. En lugar de pasar años preparándose para la vida agrícola e industrial, los ciudadanos necesitarán conocer un conjunto básico de habilidades y modelos computacionales para comprender los modelos psicosociales subyacentes integrados en las aplicaciones; y decidir en cuáles confiar.*

## **CUATRO DESAFÍOS**

Hay varios desafíos que nuestros estudiantes enfrentarán en los próximos 20 años. Uno de ellos es el cambio climático. En los países desarrollados, la energía capturada actualmente per cápita por año es 50 veces mayor que la energía capturada por nuestros antepasados cazadores-recolectores (Morris, 2013). Sin embargo, en los países subdesarrollados la energía captada per cápita es apenas un tercio del nivel de los países desarrollados (Gates, 2021). Dado que las personas en los países subdesarrollados representan aproximadamente el 90% de la población y aspiran a vivir como lo hacen las personas en el mundo desarrollado, la demanda de energía se triplicará. Si no cambiamos el modelo de producción, las emisiones de carbono aumentarán y el calentamiento global seguirá creciendo. Este es uno de los desafíos de la próxima generación que enfrentarán nuestros estudiantes. Esto, por supuesto, requerirá que los futuros ciudadanos sean

capaces de comprender estos fenómenos, sus componentes y el efecto de diferentes intervenciones.

Otro desafío importante son las pandemias. Aunque algunos predijeron una pandemia como la actual pandemia de COVID-19, nadie se preparó para ello. Hoy necesitamos educar y preparar a los estudiantes para enfrentar nuevos brotes. La creciente densidad de población, conectividad y movilidad facilitan la aparición de nuevas pandemias y, en particular, pandemias a escala mundial. A diferencia de las enfermedades típicas de los cazadores-recolectores, estas son enfermedades de masas que aparecieron con la agricultura y requieren una población mínima de cientos de miles de habitantes (Diamond, 2012). Es fundamental que los ciudadanos comprendan el efecto del distanciamiento social, la movilidad reducida, el uso de mascarillas y los diferentes tipos de vacunas y tratamientos sobre la propagación de una enfermedad. Los ciudadanos necesitarán habilidades matemáticas y el conocimiento de un conjunto básico de modelos básicos para estimar la relación entre estos parámetros y la importancia para su salud. En otras palabras, los estudiantes necesitan este conjunto de habilidades de pensamiento matemático para desarrollar conocimientos sobre salud.

Un tercer desafío es la desigualdad. El vórtice creciente de cambios tecnológicos desplazará a los menos educados y agravará la desigualdad (Deaton, 2013; Brynjolfsson y McAfee, 2014). Se trata de una carrera entre el desarrollo tecnológico y el aumento de la escolarización (Deaton, 2013). Genera el fenómeno de “el ganador se lo lleva todo” (Frank & Cox, 1995), que es particularmente fuerte en las actividades en línea (Ford, 2015). Este fenómeno produce la clase “casi rica” formada por vendedores, contables, médicos y millones de personas que ganan en nichos pequeños de mercado. Son la nueva fuente más importante de desigualdad (Frank y Cox, 1995).

Sin embargo, hay un cuarto desafío, que es de naturaleza diferente y parece tener un impacto aún mayor. Ahora estamos siendo testigos del desarrollo de aplicaciones autónomas o agentes artificiales que utilizan el aprendizaje automático para detectar, aprender, comunicarse con otros dispositivos y tomar decisiones para los ciudadanos constantemente. Esta tecnología está llevando a un nivel de cambio que tendrá un gran impacto psicológico y económico. Primero, puede excluir a muchas personas del mercado laboral. En segundo lugar, puede convertir a muchas personas en irrelevantes (Harari, 2015). Este es el auge de la clase inútil (Harari, 2015). No es una clase explotada, abusada o infravalorada. Es radicalmente diferente. Es una clase superflua. Esto podría conducir fácilmente a un aumento en las enfermedades de salud mental y una profunda falta de sentido de la vida. Tercero, es probable que los ciudadanos pierdan el control de sus propias vidas ya que varias aplicaciones decidirán por ellos. Además, también hay un impacto significativo en la confianza pública (Jian et al., 2000). La mayoría de estas aplicaciones son proporcionadas por terceros y están diseñadas principalmente para satisfacer sus propias necesidades e intereses. Será muy difícil descifrar la verdadera

motivación incrustada en ellos. En este artículo, argumentamos que este problema de confianza es el mayor desafío para los próximos 20 años, y que el pensamiento matemático es esencial para ayudar a abordar este difícil acertijo. A diferencia de los tres desafíos anteriores, este desafío es un punto de inflexión importante en la historia de la civilización. Están en juego la autonomía, el libre albedrío y la naturaleza de la condición humana. Dadas estas implicaciones, este artículo se centrará principalmente en este desafío.

### **TERCERIZANDO SU PENSAMIENTO A UN CONSEJO DE APLICACIONES**

Hoy en día, muchas aplicaciones o agentes artificiales en su teléfono inteligente le hacen sugerencias. Por ejemplo, cómo ir de un lugar a otro de la ciudad, o qué noticias mirar. Pronto, algunas aplicaciones tomarán la iniciativa, como conducir su automóvil o proporcionarle de forma autónoma una dosis precisa de un medicamento. Poco a poco nos vamos acostumbrando a depender de aplicaciones que nos ayuden a pensar y decidir. Cada vez más, las aplicaciones aprenden nuestras necesidades y preferencias y, por lo tanto, toman el control de nuestras decisiones. Es muy probable que pronto se enfrente al dilema de recibir consejos contradictorios de dos aplicaciones diferentes. En ese caso, deberá hablar con ambas y comprender el desacuerdo. Después de eso, las aplicaciones podrían hablar entre sí y llegar a un acuerdo. Pero si no están de acuerdo, ¿qué hará? A continuación, considere la situación en la que tiene muchas aplicaciones o agentes artificiales. Esto significa que de hecho tendrá un consejo formado por sus aplicaciones preferidas. Usted será el Rey Arturo con su mesa redonda de aplicaciones concejales. Pero, ¿qué hará cuando haya opiniones divergentes? ¿Qué hará si algunas aplicaciones acusan a otras de negligencia, descuido, análisis deficiente, mentira o incluso deslealtad, corrupción o traición? El problema se vuelve aún más grave si considera que las aplicaciones aprenden constantemente cosas sobre usted y sobre el mundo que usted mismo no conoce. ¿Cómo determinará si las decisiones son razonables y buenas para usted?

El problema se agrava cuando entra un componente crítico: las verdaderas motivaciones de las aplicaciones. Estos agentes artificiales fueron diseñados por terceros y, por lo tanto, se espera que sirvan a los intereses de los proveedores, no a los suyos. Serán los nuevos cigarrillos electrónicos que, al igual que la industria tabacalera, nos ha convencido subliminalmente de que estamos mejor con ellos. Además, sus contactos, competidores, enemigos, amigos o cualquier individuo u organización pueden configurar sus propios agentes artificiales que rastrean o espían sus acciones y las acciones de cualquiera de los miembros de su consejo de agentes artificiales para lograr sus objetivos en lugar de los suyos. Lo más probable es que no solo rastreen su información, sino que también manipulen los datos y, eventualmente, incluso intenten engañarlo a usted y a sus agentes artificiales. Es probable que las aplicaciones formen alianzas que les permitan alcanzar mejor sus objetivos. Entonces, una posible solución es mejorar sus agentes artificiales

adquiriendo de terceros agentes más poderosos; aplicaciones con mejor conocimiento y más memoria, más rápidas y mejor conectadas. Sin embargo, ese tipo de solución provocará una reacción de los demás y sus agentes artificiales. Usted, sus agentes artificiales, sus contactos y sus agentes artificiales correspondientes producirán no solo una reacción en cadena de efecto dominó, sino ciclos con acciones y reacciones. En otras palabras, se desencadenará una carrera armamentista permanente. ¿Cómo determinará en cuáles confiar?

Subcontratar su pensamiento y toma de decisiones no es fácil. Al igual que el rey Arturo o el presidente, no podrá confiar plenamente en su consejo y simplemente descansar. Deberá estar constantemente monitoreando y verificando que las decisiones sean razonables.

### **¿ATRAPADO EN UNA TRAMPA EVOLUTIVA?**

¿Cómo puede nuestro cerebro discriminar quién es digno de confianza y quién no? Para responder a esta pregunta, tenemos que considerar cómo ha evolucionado el cerebro humano y para qué problemas está bien adaptado. Nuestro cerebro es el producto de un proceso de selección natural que ha tenido lugar durante millones de años. A lo largo de miles de generaciones, ha desarrollado mecanismos muy eficientes para adquirir los conocimientos y las habilidades necesarios para la vida de los cazadores-recolectores. Estos son los mecanismos de aprendizaje de imitación, juego, narración y enseñanza, que nos permiten aprender a caminar, hablar, recolectar comida, cazar, cocinar, luchar contra otras bandas y mantener una vida social productiva en nuestra tribu. Estos tipos de conocimientos y habilidades se denominan biológicamente primarios (Geary, 2007). Sin embargo, debido a los enormes avances en la evolución cultural durante los últimos 5.000 años, hoy necesitamos que los estudiantes hagan y aprendan cosas completamente nuevas, a menudo de naturaleza totalmente diferente y algunas de ellas muy contrarias a la intuición. Los estudiantes también necesitan aprender a vivir y socializar con miles de extraños en lugar de con docenas de parientes. Tienen que aprender a leer y escribir, algo para lo que el cerebro no está adaptado, lo que requiere una práctica intensiva y guiada, y que conduce a una gran transformación de diferentes áreas del cerebro (Dehaene, 2005; Henrich, 2020). También necesitan que aprendan conceptos abstractos que son totalmente diferentes a los adquiridos por sus antepasados, como notación posicional, números negativos, fracciones y álgebra. Estos se consideran conocimientos y habilidades biológicamente secundarios (Geary, 2007).

Entonces existe lo que los biólogos evolutivos (Mayr, 1942; Wilson, 2019) y los psicólogos (Van Gugt, 2020) llaman un desajuste evolutivo o trampa evolutiva. Es decir, nuestro cerebro está atrapado con ciertas características poderosas que no se adaptan bien a la vida moderna. Uno de los primeros casos identificados ocurrió con tortugas. Al incubar en las playas, las tortugas recién nacidas saben que deben dirigirse en la dirección

de la luz de la luna. Sin embargo, en los entornos actuales, este mismo mecanismo los dirige hacia las luces de la ciudad y lejos del mar. El mismo fenómeno ocurre con la dieta humana. Nuestros antepasados vivieron sin tener comida garantizada para los próximos días y con el constante peligro de hambruna. Hubo frecuentes e impredecibles escaseces de alimentos (Diamond, 2012). Tampoco tenían refrigeradores para almacenar alimentos. Esto hace que nuestro cerebro busque alimentos ricos en calorías y coma tanto como sea posible para almacenar energía en forma de grasas. Pero hoy, con una gran abundancia de alimentos disponibles, este mecanismo conduce a la obesidad. Las habilidades biológicamente primarias son muy poderosas, pero también pueden ser trampas que obstaculizan las habilidades biológicamente secundarias.

La buena noticia es que es posible salir de estas trampas evolutivas con un entrenamiento especial. Sin embargo, no es fácil y se necesitan muchos años de educación con una pedagogía bien ajustada y un trabajo permanente dirigido. Por ejemplo, solo con años de práctica podemos aprender a leer. La alfabetización produce grandes transformaciones en áreas del cerebro humano, así como la pérdida de algunas habilidades. Un ejemplo es el reconocimiento facial, que queda marginado solo en un hemisferio y no se extiende a dos, como es el caso de las personas analfabetas.

Otro ejemplo es la vida social, que en nuestros antepasados cazadores-recolectores estaba en grupos de alrededor de 150 individuos, conocido como el número de Dunbar (Dunbar, 1992), la mayoría de los cuales eran parientes. Cuando detectaban extranjeros merodeando en los límites del territorio, inmediatamente se producían conflictos e incluso asesinatos (Diamond, 2012; Wrangham, 2019). A pesar de que nos hemos domesticado a nosotros mismos como resultado de aplicar la pena de muerte a aproximadamente el 15% de los hombres más violentos en los últimos trescientos mil años, reduciendo así en gran medida la agresión reactiva en comparación con otros primates como los chimpancés y los bonobos, todavía sufrimos agresiones proactivas premeditadas (Wrangham, 2019). En guerras de la antigüedad, todos los hombres y niños de los vencidos eran asesinados. No fue hasta hace 5.000 años que los vencedores empezaron a capturar prisioneros, aunque quitándoles los ojos para que no se escaparan y haciéndolos trabajar en actividades que no requerían de la vista (Diamond, 2012). Hoy, gracias a años de escolaridad, logramos convivir con millones de desconocidos sin ni siquiera emocionarnos. Aunque nunca los hemos visto, estamos dispuestos a colaborar y ayudarlos. Sin embargo, el nepotismo sigue siendo fuerte, al igual que los prejuicios hacia familiares, amigos y miembros de nuestros grupos de interés. Hemos hecho la transición a una vida con millones de personas, la mayoría de las cuales son desconocidas para nosotros, a quienes nunca hemos visto cara a cara ni nunca los veremos. Esta transición fue un cambio monumental que tomó milenios. Por ejemplo, entre los Yanomamö, cazadores-recolectores que viven entre Venezuela y Brasil,

... Los extraños son generalmente sospechosos y vistos con desconfianza porque los Yanomamö creen que es probable que les inflijan daños sobrenaturales. Saber el nombre personal de alguien es, en cierto sentido, "poseer" algún tipo de control sobre esa persona, por lo que los Yanomamö inicialmente no quieren que los extraños sepan sus nombres personales. (Chagnon, 2013, pág.35).

En cambio, hoy

el acto aparentemente trivial de entrar en un café lleno de extraños sin preocuparse por el mundo es uno de los logros más subestimados de nuestra especie, y separa a la humanidad de la mayoría de los demás vertebrados con sociedades. (Moffett, 2018, pág.5).

Requiere una enorme cantidad de confianza en otras personas que nunca se ha conocido ni es probable que vuelva a encontrar en el futuro. Esta es una confianza impersonal. Se puede medir aproximadamente con la pregunta de confianza generalizada: "En términos generales, ¿diría que se puede confiar en la mayoría de las personas o que no nunca se puede dejar de tener demasiado cuidado al tratar con las personas?" (Henrich, 2020).

Dada la creciente aparición de aplicaciones inteligentes y un consejo de "asesores" artificiales cada vez más sofisticados, es fundamental comprender el mecanismo que tenemos para generar confianza. Este mecanismo puede ser pirateado fácilmente por estos agentes artificiales. Una habilidad social fundamental es la detección de tramposos. Es un proceso automático y sin esfuerzo, que es independiente y no interfiere con otras tareas cognitivas (Van Lier et al., 2021). Sin embargo, este mecanismo se ajusta a la vida de cazador-recolector, donde las interacciones fueron cara a cara y en un grupo de alrededor de 150 personas, muchas de las cuales también eran parientes cercanos. Todo el mecanismo ha evolucionado para interacciones con grupos muy pequeños en lugar de grandes grupos de personas anónimas, y con interacciones cara a cara fuertes y recurrentes en lugar de las interacciones con agentes artificiales que se están volviendo cada vez más comunes. Aquí tenemos un ejemplo de un profundo desajuste evolutivo. Con la creciente población de aplicaciones y agentes artificiales en los próximos años, este desajuste evolutivo particular será aún mayor.

Lo que los estudiantes enfrentarán cada vez más es un tipo de agente radicalmente nuevo. Estos agentes no solo son artificiales sino cada vez más inteligentes. Aprenden a velocidades cada vez más altas y lo hacen constantemente, 24 horas al día, 7 días a la semana. Para este nuevo mundo, las estrategias evolucionadas para detectar tramposos y los mecanismos para construir relaciones de confianza mutua estarán cada vez más mal adaptados y, por lo tanto, explotará un enorme desajuste evolutivo.

## **¿CÓMO ESCAPAMOS DE LA TRAMPA Y APRENDEMOS EN QUÉ CONFIAR?**

Se podría pensar que con tantas super aplicaciones y agentes artificiales superinteligentes, los ciudadanos perderían toda posibilidad de autonomía o libre albedrío. Los agentes

artificiales conocerían antes que nosotros nuestras preferencias, nuestras limitaciones y predecirían con gran precisión lo que vamos a hacer. Esto no tiene por qué ser una predicción pesimista y distópica. Podría ser todo lo contrario. Con la carrera armamentista de los agentes artificiales que se desencadenará, tenemos la posibilidad de gestionarnos y seguir mejorando nuestro bienestar. Será un juego de póquer gigante y constante, pero con una educación adecuada, podemos evitar que nos lean y nos manipulen. El punto crítico es que cada aplicación tiene limitaciones a la hora de predecir el comportamiento de otras. Al igual que los humanos, también tienen una racionalidad limitada. Predecir el comportamiento de las personas y los agentes artificiales es más complejo que el clásico problema de física irresoluble de predecir la trayectoria de los  $n$ -cuerpos. A diferencia del problema de física en el que la interacción es muy simple y solo depende de la distancia entre los objetos, en este caso hay  $n$  mentes que intentan evitar ser predichas por otras. Es un juego de persecución y evasión multijugador. La carrera de armas de las súper aplicaciones salvará al ciudadano siempre que comprendamos los modelos subyacentes que rigen el comportamiento de los agentes artificiales y podamos establecer un diálogo con aplicaciones confiables. Dotado de la educación adecuada y un consejo de agentes artificiales confiables, los ciudadanos pueden defenderse de la omnipresencia invisible de un súper panóptico de millones de aplicaciones. No es un juego de suma cero. Todos podemos ganar.

Los estudios etnográficos en poblaciones que todavía viven hoy como cazadores-recolectores han encontrado que los niños aprenden principalmente de sus compañeros y de sus padres. Aprenden observando, jugando e imitando las ideas y prácticas de los demás. Los adolescentes y los adultos aprenden habilidades más complejas de parientes no directos a través de la observación y la instrucción ocasional (Lew Levy et al., 2017). Aprender qué comer por ensayo y error es muy peligroso. Es muy fácil enfermarse o morir. Es muy costoso y requiere mucho tiempo explorar y redescubrir de forma aislada algo que nuestros antepasados han desarrollado a través de siglos de trabajo colaborativo. Sin embargo, la observación y la imitación ya no son suficientes en el mundo moderno de hoy. El conocimiento ha aumentado sustancialmente. En el espacio de una o dos décadas, los estudiantes necesitan asimilar conceptos y formas de pensamiento matemático que son el producto de milenios de desarrollo y una fuerte interacción social. Cada vez aparecen más conceptos y modelos nuevos que permiten una mejor y más profunda comprensión del mundo y de nosotros mismos. Estos hechos y modelos se utilizan en un número cada vez mayor de aplicaciones y agentes artificiales.

Las habilidades clave incluyen modelamiento matemático y computacional. Hoy en día es común pensar en términos de modelos computacionales como los que predicen la evolución de las pandemias, el cambio climático o múltiples fenómenos sociales como la inmigración y la segregación. Un ejemplo de esto son los modelos computacionales que ayudan a comprender la segregación escolar dentro de los sistemas escolares. Tales

modelos revelan una gran desigualdad en términos de rendimiento académico entre escuelas, así como sistemas escolares que están enormemente segregados por niveles socioeconómicos (Araya & Gormaz, 2012). Otros ejemplos de la educación son modelos que explican la segregación que se da dentro de cada aula (Akerlof, 2017). Cada vez más aplicaciones se basan en modelos basados en agentes, así como en cantidades masivas de datos. Pero estos modelos están contruidos por expertos con simplificaciones de la realidad. Por lo tanto, es muy importante comprender esas simplificaciones y los supuestos subyacentes. Además, los datos masivos utilizados pueden estar muy sesgados. Por ejemplo, muchos de los resultados de décadas de investigaciones de fenómenos psicológicos se basan en estudios y experimentos realizados con estudiantes de universidades occidentales. Son lo que se conoce como gente WEIRD: Occidental Educada, Industrializada, Rica y Democrática (Henrich, 2020). Sin embargo, las repeticiones de algunos de estos experimentos en otras poblaciones producen resultados diferentes. Por lo tanto, nuestros estudiantes deben estar preparados para conocer y comprender estas simplificaciones y sesgos.

El gran desafío de la confianza en múltiples agentes y aplicaciones artificiales solo se puede resolver si los ciudadanos comprenden los modelos básicos subyacentes sobre los que se construyen estas aplicaciones. Por ello, se vuelve cada vez más importante que los estudiantes conozcan los principales modelos matemáticos y computacionales no solo de las ciencias físicas, sino también de los fenómenos ambientales, biológicos, económicos, sociales y psicológicos.

## **¿CÓMO PODEMOS APRENDER SOBRE UN CONJUNTO BÁSICO DE MODELOS Y MODELAMIENTO?**

Además del conocimiento de un conjunto básico de modelos, uno podría pensar que el desarrollo de habilidades generales, como el modelamiento, sería suficiente. Aunque el modelamiento es innato, no siempre es un proceso de pensamiento consciente y riguroso. Es espontáneo e inconsciente en situaciones importantes y recurrentes para nuestros antepasados cazadores-recolectores. Por ejemplo, modelar un territorio y pensar en cómo llegar a un área determinada, cómo asegurar el agua, cómo recolectar alimentos y cómo planear la caza de un animal. Es un proceso inconsciente y sin esfuerzo. Sin embargo, el uso consciente de modelos, especialmente modelos más complejos, requiere capacitación y años de práctica específica. Estamos bien equipados con herramientas de pensamiento, tanto abstractas como concretas (Dennett, 2017). A diferencia de otros animales, este arsenal es producto de la evolución cultural. Sin embargo, existe una percepción algo ingenua (no respaldada por estudios empíricos) de que las habilidades de pensamiento, en particular las habilidades de pensamiento crítico, son independientes del contenido. Esta idea ingenua de independencia y transferencia de habilidades de pensamiento de un área a otra se llama efecto Mozart: la idea de que escuchar la música de Mozart, o aprender a tocar un instrumento musical o ajedrez o aprender algo difícil como el latín se transferirá



a otros temas (Willingham, 2015). El premio Nobel Herbert Simon ilustró este concepto erróneo con estudios de ajedrecistas expertos que no competían favorablemente con los no expertos en la memorización de posiciones espaciales cuando las piezas se colocaban en el tablero al azar (Gobet et al., 1998).

Además, el pensamiento matemático debe mostrarse con ejemplos de contenido concreto. Debe ser conocimiento denotativo (versus conocimiento connotativo) (Katagiri, 2004; Isoda & Katagiri, 2012). Incluso cuando uno comprende frases matemáticas que expresan significado, eso no significa que uno sea capaz de hacerlo matemáticamente. Es necesario enseñar el pensamiento matemático con ejemplos concretos. De lo contrario, es simplemente "conocimiento inerte" (Whitehead, 1929). Además, no basta con demostrar el proceso de pensamiento crítico. "Los estudiantes necesitan practicar para participar en el proceso de pensamiento crítico por sí mismos, y esta práctica debe ser deliberada y repetida con comentarios específicos" (Holmes et al., 2015, p. 11199).

Una idea muy popular entre los educadores es que, cuando se enfrenta a un problema, un estudiante puede comenzar a modelar por sí mismo. No tienen en cuenta que nuestra civilización ha desarrollado un conjunto de modelos clave durante varios milenios. Estos modelos no son intuitivos, son herramientas de pensamiento muy poderosas en una gran variedad de situaciones y requieren años de entrenamiento para dominarlas. Solo una vez que se ha utilizado y dominado un modelo, los estudiantes pueden comenzar a seleccionar modelos alternativos, ajustar los parámetros del modelo y, finalmente, construir modelos o partes de modelos. Es esta trayectoria la que condujo a la estrategia de enseñanza de modelos que llamamos Use Select Adapt Build (USAB) (Araya, 2012a). Según el matemático Henry Pollak,

en la enseñanza del modelamiento ... [usted] tiene que tomar algunos modelos que se han creado y que se sabe que son exitosos y los estudiantes tienen que estudiar esos modelos y comprender qué los hace funcionar, y pensar en lo que se incluyó en su creación y la forma en que fueron formulados y su éxito. (Pollak, 2007 p. 114).

Es particularmente importante comenzar a aprender y comprender un "conjunto básico de modelos" (Page, 2018) que puede verse como una multiplicidad de lentes. "El dominio de los modelos mejora tu capacidad para razonar, explicar, diseñar, comunicar, actuar, predecir y explorar" (Page, 2018 p. 1).

Acceder a los principales modelos y métodos que utilizan las aplicaciones es una forma de poder evaluar críticamente sus recomendaciones y decisiones. Considere el caso de la compra impulsiva, o el consumo impulsivo de golosinas, o cualquier decisión impulsiva. Se sabe que no analizamos opciones con descuentos exponenciales como lo hacen los banqueros. Los seres humanos y los animales utilizan descuentos hiperbólicos que nos hacen muy difícil evitar una pizza y ceñirnos a nuestra dieta, o comprar impulsivamente un buen coche, o gastar todos nuestros ingresos y no ahorrar para nuestra pensión. Algo

de poco valor pero cercano en el tiempo, parece tener más valor que algo más distante en el tiempo pero de mayor valor. Esto es muy similar a cuando camina hacia casas y edificios altos. En la distancia, el edificio de 10 pisos parece más alto que la casa de un piso. Sin embargo, si la casa de un piso está primero en la calle, al acercarse caminando a ella eventualmente ocurre una inversión: la casa parece más alta y puede cubrir el edificio de 10 pisos. Hay una inconsistencia en las alturas a medida que se acerca a ellas, ya que las alturas relativas percibidas cambian. Esta forma de valorar y decidir resultó ventajosa en muchas de las situaciones recurrentes de nuestros antepasados, pero no es un mecanismo de preferencia bien adaptado a la vida moderna. Es un "error" mental. Pero las aplicaciones pueden piratear fácilmente este "error" en la toma de decisiones. Si nuestros estudiantes conocen y comprenden el modelo de descuento hiperbólico y las estrategias "para ser más astutos que los futuros yo que tendrán estas preferencias" (Ainslie, 2001 p.27), entonces podrán comprender las acciones de las aplicaciones. El alumno tendrá así la capacidad de detectar qué agentes artificiales están utilizando este "error" para lograr sus intereses y no los del usuario.

Otro modelo importante es el Aprendizaje Automático (ML) aplicado al aprendizaje de diferentes tareas, que van desde el diagnóstico médico o industrial, y la calificación crediticia, hasta el reconocimiento de voz o imagen. En experimentos con estudiantes de primaria (Araya 2007; Araya et al., 2011; Araya et al., 2014) aplicando ML y en otros experimentos con el algoritmo subyacente de descenso más pronunciado (Araya, 2021a), y con pensamiento computacional (Araya Isoda et al., 2020; Araya, 2021b), hemos encontrado que los estudiantes aprenden y disfrutan de estas actividades, detectan patrones y construyen modelos a partir de datos etiquetados. También les ayuda a comprender los posibles sesgos en los modelos aprendidos.

## **¿QUÉ PASA CON LA CREATIVIDAD AL CONSTRUIR MODELOS?**

Además del uso, selección y ajuste de modelos, necesitamos estudiantes creativos que sean capaces de construir nuevos modelos y descubrir nuevos métodos o soluciones. Según el matemático Jacques Hadamard, para proponer nuevas ideas, primero se requiere un trabajo intenso y persistente tratando de avanzar en el problema. Esta es la etapa de preparación (Hadamard, 1945). Luego viene una etapa de incubación, donde mucho se desarrolla inconscientemente durante el sueño u otras actividades hasta que finalmente comienzan a aparecer ideas de soluciones. Según Poincaré, hay una recombinación de ideas: "Las ideas surgen en multitudes; Las siento chocar hasta que los pares se entrelazaron, por así decirlo, formando una combinación estable" (Hadamard, 1945, p. 14). O, como dice Ridley, las ideas tienen sexo entre sí (Schermer, 2010). Luego viene la selección de la combinación correcta. Según Hadamard "inventar es elegir" Hadamard, 1945, p. 30. Una dinámica similar ocurre en los estudiantes de K12. Los estudios de descubrimiento en niños de escuela primaria encuentran que después de un período intenso de práctica con estrategias estándar, surge un proceso inconsciente de mutaciones

y combinación de las ideas originales, y luego la selección de las adecuadas (Siegler y Stern, 1998). Esto da lugar a ideas inconscientes que emergen más tarde en la conciencia. Los modelos computacionales del algoritmo de mutación-recombinación-selección muestran que este proceso es capaz de simular con precisión el comportamiento de descubrimiento (Siegler & Araya, 2005). Lo crucial es trabajar intensamente en proporcionar práctica deliberada para facilitar el surgimiento de nuevas ideas. Además, las analogías, las metáforas y la metáfora enactiva (representada corporalmente) también pueden fomentar el descubrimiento (Araya, et. Al, 2010; Soto-Andrade, 2018), como Einstein respondió a Hadamard.

... Desde un punto de vista psicológico, este juego combinatorio parece ser un rasgo esencial en el pensamiento productivo,..., los elementos antes mencionados son, en mi caso, de tipo visual y algunos de tipo muscular (Hadamard, 1945, p. 142).

Además de comprender un conjunto básico de modelos y trabajar con ellos de forma intensiva, los estudiantes también deben cultivar un conjunto básico de actitudes de pensamiento. Estos son estados mentales intencionales para buscar, intentar hacer conexiones, explorar al azar, buscar diferentes alternativas, trabajar para establecer una perspectiva, buscar contraejemplos, aventurar nuevos puntos de vista, buscar claridad y mejores ideas, y probar diferentes modelos (Isoda y Katagiri, 2012). Para lograr este estado actitudinal, es importante comprender y dominar diferentes herramientas. En este sentido, dominar un conjunto básico de modelos es particularmente importante. Por lo tanto, los estudiantes deben poder comprender las ideas y metáforas subyacentes del modelo y refinar los modelos en función de nuevos hechos, datos, predicciones, éxitos y fracasos.

## **¿CÓMO PODEMOS PREPARARNOS PARA ENSEÑAR ESTAS HABILIDADES DE PENSAMIENTO?**

La cantidad de nuevas habilidades, modelos y actitudes que necesitamos enseñar a los estudiantes presenta un desafío significativo. Por tanto, necesitamos una pedagogía cada vez más precisa que en poco tiempo pueda permitir el aprendizaje profundo de ideas cada vez más complejas. Gracias a un plan de estudios bien planificado y una instrucción precisa, los humanos han logrado escapar parcialmente de algunas de las trampas evolutivas. Eso, sin embargo, requiere años de instrucción dirigida y práctica deliberada. Adaptar las prácticas de enseñanza y hacer que los profesores asimilen el nuevo conocimiento del contenido para este conjunto de modelos básicos es un gran desafío educativo. Una estrategia potencial para desarrollar las habilidades de los docentes es establecer una comunidad con una actitud poderosa de compartir, innovar y aprender en colaboración.

Una de esas estrategias que está bien probada es la centenaria metodología japonesa de estudio de clases y demostraciones masivas en clases públicas abiertas (Isoda, 2015).

Comenzó en 1880 en Japón con el objetivo de reproducir las mejores prácticas en la enseñanza (Isoda, 2015). Ha sido adoptado en Tailandia (Inprasitha, 2015a) y Singapur (Yeap et al., 2015). Muchos otros países también han comenzado a introducirlo (Quaresma et al., 2019; Estrella et al., 2018). Es un proceso colaborativo de mejora de la enseñanza diseñado para generar comunidades sólidas y productivas de docentes que comparten y aprenden unos de otros. Además, “cuando los maestros trabajan juntos... construyen capital pedagógico, un recurso escaso porque el aislamiento es endémico en las escuelas segregadas por edades” (Cuban, 2013, p. 181). El estudio de lecciones acelera la producción de lecciones efectivas y, en particular, ayuda al desarrollo del enfoque abierto, con lecciones que tienen como objetivo desarrollar habilidades de pensamiento de orden superior (Inprasitha, 2015b).

Un ejemplo de colaboración multinacional e interdisciplinaria es la de la comunidad APEC dirigida por Masami Isoda de Japón y Maitree Inprasitha de Tailandia. Durante más de una década, han reunido a investigadores y profesores de 21 países de APEC. Cada año, el equipo pasa por un proceso de cinco etapas. Primero, el equipo define un contenido multidisciplinario específico, innovador y desafiante para enseñar. En segundo lugar, en cada país, los equipos respectivos diseñan e implementan una lección en las aulas locales. Un año fueron tsunamis, el año siguiente fueron inundaciones y otro año fueron incendios forestales. En cada caso, se promueve el modelamiento matemático y computacional. También se alienta a los equipos a ayudar a los estudiantes a lograr una comprensión profunda y una actitud proactiva y perseverante en la búsqueda de alternativas y perspectivas diferentes, ideando experimentos y haciendo predicciones, conjeturando patrones y explicaciones, buscando el trabajo colaborativo en equipos y estando abiertos a nuevas estrategias. Otros contenidos que se han abordado en los últimos años incluyen el pensamiento computacional (incluido el aprendizaje automático y el modelado computacional) y el pensamiento estadístico para big data. Durante la tercera etapa, seis meses después, el grupo se reúne para compartir y analizar cómo los integrantes han implementado el contenido en aulas reales en sus respectivos países (Isoda et al., 2017; Araya Collanqui, 2021; Wiemken et al., 2021). Cuarto, en sus respectivos países, los miembros hacen ajustes a sus clases. En la quinta y última etapa, nuevamente seis meses después, algunos de los miembros realizan lecciones públicas abiertas con estudiantes del país anfitrión. Un panel los analiza cuidadosamente y el equipo de APEC genera recomendaciones finales para su implementación.

## **PREPARAR A LOS PROFESORES PARA EDUCAR PARA LA SOCIEDAD SÚPER INTELIGENTE**

Necesitamos enseñar ideas completamente nuevas dentro de un plan de estudios ya abarrotado. En definitiva, el cambio necesario en contenidos y docencia será enorme. Esta no es una tarea fácil. Considere, por ejemplo, el proyecto para cambiar a un enfoque de enseñanza más activo en un par de universidades de EEUU y Canadá dirigido por el

premio Nobel Carl Weiman (Weiman, 2017). El esfuerzo costó alrededor de \$ 65 por hora crédito. Eso es el equivalente a \$ 60,000 por curso. Sin embargo, solo el 10% de los profesores universitarios de matemáticas cambiaron sus prácticas docentes.

Como hemos visto, una opción es el estudio de clases. Sin embargo, tiene algunas limitaciones (Yeap et al., 2015). Una limitación es encontrar tiempo para reunirse cara a cara para observar las lecciones de los otros miembros del grupo, analizar cuidadosamente las lecciones y buscar formas de mejorarlas. Otra limitación es que solo funciona con pequeños grupos de profesores.

Aunque las clases públicas abiertas se desarrollan con cientos o miles de profesores que observan activamente las lecciones, solo se llevan a cabo un par de veces al año. Lo que necesitamos construir es una comunidad mucho más grande y más conectada. Si la comunidad es muy pequeña, puede experimentar el "efecto de Tasmania" (Henrich, 2016). Esta es una regresión que ocurrió en Tasmania. A medida que el tamaño de la comunidad se redujo hace 12.000 años como resultado del aumento del nivel del mar que los separó de Australia continental, los aborígenes comenzaron a perder sus conocimientos para fabricar herramientas, armas, ropa y botes, y finalmente regresaron a más herramientas culturales primitivas. El tamaño del grupo interconectado impacta, por ejemplo, en el tamaño del vocabulario. Los adolescentes estadounidenses saben alrededor de 17.000 palabras, mientras que las sociedades en pequeña escala tienen un vocabulario de entre 3.000 y 5.000 palabras (Henrich, 2016). Lo que se necesita es un cerebro verdaderamente colectivo que recurra a un gran número de profesores. Por ejemplo, hemos encontrado que un ecosistema territorial, cultivado por 640 maestros con la plataforma ConectaIdeas, les ayudó a adaptar las estrategias de enseñanza para los alumnos de primer y segundo grado en cuarentena durante la pandemia de COVID19 (Araya, 2021c). Noventa y ocho maestros compartieron sus estrategias subiendo un par de videos de 3 minutos cada semana. A partir de estos videos encontramos una evolución de las estrategias en cinco generaciones sucesivas, con evidencia de imitación y mejora de las estrategias mostradas en videos anteriores. En otro experimento, también encontramos que un ecosistema de padres en línea utilizado por miles de padres les ayudó a difundir estrategias para apoyar a los estudiantes de primer grado que aprenden en casa (Araya, 2021d).

Dada la necesidad de introducir rápidamente un conjunto básico de modelos y habilidades asociadas, también necesitamos aumentar la velocidad de difusión y adopción. Una posibilidad son los agentes artificiales: una comunidad de aplicaciones de observación de clases que brindan retroalimentación inmediata al maestro. Por lo tanto, no sería necesario que el maestro se reuniera con otros para observar las lecciones. Los agentes artificiales observarán, analizarán y darán retroalimentación al docente. Nosotros y otros ya hemos comenzado a desarrollar aplicaciones para observar lecciones, detectar patrones de enseñanza a partir de características acústicas de la enseñanza (Schlotterbek et al., 2021), analizar el discurso de docentes y estudiantes obtenido a través de transcripciones

automáticas (Araya, 2012b; Uribe et al., 2020; Lämsä et al., 2021; Altamirano et al., 2020), analizan el análisis multimodal automático que combina características acústicas y textuales del habla en el aula (Schlotterberg et al., en prensa), detectan patrones de comportamiento no verbal como gestos (Araya et al. ., 2015; Araya et al., 2016; Hernandez Correa et al., 2020), miradas y orientación corporal en el aula (Araya Farsani, 2020), y estimar el impacto del discurso en el rendimiento estudiantil (Schlotterbeck et al., 2020). ). Pronto, este tipo de aplicaciones analizarán las lecciones y brindarán a los maestros comentarios en tiempo real sobre la tarea. Ofrecerán apoyo en conocimientos tanto pedagógicos como de contenido. Estos agentes artificiales que acompañarán al docente, también se conectarán en tiempo real con los agentes artificiales de otros docentes para intercambiar estrategias, adaptarlas, recombinarlas, crear nuevas y discutir las con sus docentes.

Bienvenido a las *mega comunidades de aprendizaje* con profesores apoyados por una mesa redonda de agentes artificiales, conectados con otros profesores y sus agentes artificiales: una comunidad superinteligente de estudio de clases.

## **Agradecimientos**

Se agradece el apoyo de ANID / PIA / Basal Funds para Centros de Excelencia FB0003.

## **Referencias**

- Ainslie, G. (2001). *Break-Down of Will*. New York, NY: Cambridge University Press.
- Akerlof, Robert J. (2017). Value formation: the role of esteem. *Games and Economic Behavior*, 102, pp. 1-19.
- Altamirano M., Jiménez A., & Araya R. (2020). Lessons Clustering Using Topics Inferred by Unsupervised Modeling from Textbooks. In: Vittorini P., Di Mascio T., Tarantino L., Temperini M., Gennari R., & De la Prieta F. (eds) *Advances in Intelligent Systems and Computing* (vol. 1241, pp. 85-94). Cham, Springer.
- Araya, R. (2021a). Enriching Elementary School Mathematical Learning with the Steepest Descent Algorithm. *Mathematics*, 9, 1197
- Araya, R. (2021b). Gamification strategies to teach algorithmic thinking to first graders. *Applied Human Factors and Ergonomics, AHFE 2021* (in press)
- Araya, R. (2021c). A collective brain to adapt teaching to quarantined first and second graders. *IxD&A*, 47, pp. 7 – 26.
- Araya, R. (2021d). A Territorial Learning Ecosystem for Parents' Participation and Cooperation. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, 197, pp. 77-89.
- Araya, R., & Collanqui, P. (2021). Are Cross-Border Classes Feasible for Students to Collaborate in the Analysis of Energy Efficiency Strategies for Socioeconomic Development While Keeping CO2 Concentration Controlled? *Sustainability*, 13, 1584.

- Araya, R., Isoda, M., & González, O. (2020). A Framework for Computational Thinking in Preparation for Transitioning to a Super Smart Society. *Journal of Southeast Asian Education*, 1, pp. 1-15.
- Araya R. & Farsani D. (2020). The Effect of Teacher Unconscious Behaviors on the Collective Unconscious Behavior of the Classroom. *Communications in Computer and Information Science*, 1287, pp. 529-540.
- Araya, R., Farsani, D. & Hernández, J. (2016). How to Attract Students' Visual Attention. *LNCS*, 9891, pp. 30-41.
- Araya, R., Behncke, R., Linker, A. & van der Molen, J. (2015). Mining Social Behavior in the Classroom. *LNCS*, 9330, pp. 451-460.
- Araya, R., Jiménez, A., Bahamondez, M., Dartnell, P., Soto-Andrade, J., & Calfucura, P. (2014). Teaching modeling skills using a massively multiplayer on line mathematics game. *World Wide Web Journal*, 17 (2), pp. 213-227.
- Araya, R. & Gormaz, R. (2012). How come educational inequality in Cuba is much higher than in Chile. Working Paper CIAE. <https://www.automind.cl/publicaciones/How-come-educational-inequality-in-Cuba-is-much-higher-than-in-Chile.pdf>
- Araya, R. Introducing mathematical modeling skills in the curriculum. (2012a). In *Proceedings of APEC Conference in Math Modeling in the Mathematics Curriculum: Some Best Practices in APEC Economies*. Indonesia, (pp. 52-64) [http://publications.apec.org/publication-detail.php?pub\\_id=1362](http://publications.apec.org/publication-detail.php?pub_id=1362)
- Araya, R., Plana, F., Dartnell, P., Soto-Andrade, J., Luci, G, Salinas, E., & Araya, M. (2012b). Estimation of teacher practices based on text transcripts of teacher speech using a support vector machine algorithm. *British Journal of Educational Technology*, 43(6), pp. 837-846.
- Araya, R., Jiménez, A., Bahamondez, M., Dartnell, P., Soto-Andrade, J., González, P., & Calfucura, P. (2011). Strategies used by students on a massively multiplayer online mathematics game. *LNCS*, 7048, pp. 1-10.
- Araya, R., Calfucura, P., Jiménez, A., Aguirre, C., Palavicino, M., Lacourly, N., Soto-Andrade, J., & Dartnell, P. (2010). The effect of analogies on learning to solve algebraic equations. *Pedagogies: An International Journal*, 5(3), pp. 216-232.
- Araya R. (2007). What is inside this box? Look at these other opened boxes for clues. *Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*.
- Brynjolfsson, E., & McAfee, A. (2014). *The Second Machine. Work, Progress, and Prosperity in a Time of Brilliant Technologies*. New York, NY: Norton
- Chagnon, N. (2013). *Noble Savages. My Life among Two Dangerous Tribes - The Yanomamo and the Anthropologists*. New York, NY: Simon & Shuster.
- Cuban, L. (2013). *Inside the Black Box of Classroom Practice. Change Without Reform in American Education*. Cambridge, MA: Harvard Education Press.

- Deaton, A. (2013). *The Great Escape. Health, Wealth and the Origins of Inequality*. Princeton: Princeton University Press.
- Dehaene S. (2005). Evolution of human cortical circuits for reading and arithmetic: The “neuronal recycling” hypothesis. In Dehaene, S.; Duhamel, J.; Hauser, M.; Rizzolatti, G. (Eds.) *From monkey brain to human brain* (pp. 133 – 157). Cambridge, MA: MIT Press.
- Dennett, D. (2017). *From Bacteria to Bach and Back*. New York, NY: Norton.
- Diamond, J. (2012). *The World Until Yesterday. What Can We Learn from Traditional Societies?* New York, NY: Viking.
- Dunbar, R. I. M. (1992). Neocortex size as a constraint on group size in primates. *Journal of Human Evolution*, 22 (6), pp. 469–493.
- Estrella, S., Mena-Lorca, A., & Olfos, R. (2018). Lesson Study in Chile: a very promising but still uncertain path. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. da Ponte, A. Ní Shúilleabháin, & A. Takahashi (Eds.). *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues*, (pp. 105-122). Cham. Springer.
- Ford, M. (2015) *Rise of Robots. Technology and the Threat of a Jobless Future*. New York, NY: Basic Books.
- Frank, R., & Cook, P. (1995). *The Winner-Take-All Society. Why the Few at the Top Get So Much More Than the Rest of Us*. New York, NY: Penguin Books.
- Geary, D. (2007). Educating the evolved mind: Conceptual foundations for an evolutionary educational psychology. In: Carlson, J.S., Levin, J.R. (eds.) *Psychological Perspectives on Contemporary Educational Issues*. Greenwich, U.S.A.: Information Age Publishing,
- Gates, B. (2021). *How to Avoid a Climate Disaster: The Solutions We Have and the Breakthroughs We Need*. New York, NY: Alfred Knopf.
- Gobet F, Simon HA. (1998). Expert chess memory: revisiting the chunking hypothesis. *Memory*, 6(3). pp. 225-55.
- Harari, Y. (2015). *Homo Deus. A Brief History of Tomorrow*. London, UK: Harvill Secker.
- Hadamard, J. (1945). *The Mathematician’s Mind. The Psychology of Invention in the mathematical Field*. Princeton: Princeton University Press.
- Henrich, J. (2020). *The WEIRDest People in the World: How the West Became Psychologically Peculiar and Particularly Prosperous*. New York: Farrar, Straus and Giroux.
- Henrich, J. (2016). *The Secret of Our Success. How Culture is Driving Human Evolution, Domesticating Our Species, and Making Us Smarter*. Princeton: Princeton University Press.
- Hernández Correa J., Farsani D., & Araya R. (2020) An application of machine learning and image processing to automatically detect teachers’ gestures. *Communications in Computer and Information Science*, 1287, pp. 516-528.
- Holmes, N., Wieman, C., & Bonn, D. (2015) Teaching critical thinking. *PNAS*, 112 (36) pp. 11199-11204.



- Lämsä, J., Uribe, P., Jiménez, A., Caballero, D., Hämäläinen, R., & Araya, R. (2021) Deep networks for collaboration analytics: Promoting automatic analysis of face-to-face interaction in the context of inquiry-based learning. *Journal of Learning Analytics*, 8(1), pp. 113-125.
- Inprasitha, M. (2015a) Transforming education through lesson study: Thailand's decade-long journey. In Inprasitha, M., Isoda, M., Wang-Iverson, P., & Yeap, B. *Lesson Study Challenges in Mathematics Education*. Singapore: World Scientific.
- Inprasitha, M. (2015b) Prospective teacher education in mathematics through lesson study. In Inprasitha, M., Isoda, M., Wang-Iverson, P., & Yeap, B. *Lesson Study Challenges in Mathematics Education*. Singapore: World Scientific.
- Isoda, M. (2015) The science of lesson study in the problem solving approach. In Inprasitha, M., Isoda, M., Wang-Iverson, P., & Yeap, B. *Lesson Study Challenges in Mathematics Education*. Singapore: World Scientific.
- Isoda, M. & Katagiri, S. (2012). *Mathematical Thinking. How to Develop it in the Classroom*. Singapore: World Scientific.
- Isoda, M., Araya, R., Eddy, C., Matney, G., Williams, J., Calfucura, P., Aguirre, C., Becerra, P., Gormaz, R., Soto-Andrade, J., Noine, T., Mena-Lorca, A., Olfos, R., Baldin, Y., & Malaspina, U. (2017). Teaching energy efficiency: A cross-border public class and lesson study in STEM. *IXD&A*, 35, pp. 7 - 31.
- Jian, J. Y., Bisantz, A. M., & Drury, C. G. (2000). Foundations for an empirically determined scale of trust in automated systems. *Int J Cognit Ergon*, 4(1), pp. 53–71
- Katagiri, S. (2004). *Mathematical Thinking and How to Teach It*. Tokyo: Meijitosyo Publishers.
- Lew-Levy, S., Reckin, R., Lavi, N., Cristóbal-Azkarate, J., & Ellis-Davis, K. (2017). How Do Hunter-Gatherer Children Learn Subsistence Skills? : A Meta-Ethnographic Review. *Hum Nat.*, 28, pp. 367–394.
- Mayr, E. (1942). *Systematics and the Origin of Species, from the Viewpoint of a Zoologist*. New York: Columbia University Press.
- Moffett, M. (2018). *The Human Swarm. How Our Societies Arise, Thrive, and Fall*. New York, NY: Basic Books.
- Morris, I. (2013). *The Measure of Civilizations. How Social Development Decides the Fate of Nations*; Princeton, NJ: Princeton University Press
- Page, S. (2018). *The Model Thinker. What you need to know to make data work for you*. New York, NY: Basic Books.
- Pollak, H. (2007). Mathematical Modelling - A Conversation with Henry Pollak. In Blum, W.; Galbraith, P.; Henn, H.; Niss, M.. *Modelling and Applications in Mathematics Education*. The 14th ICMI Study. Springer Verlag. 2007

- Quaresma, M., Winsløw, C., Clivaz, S., da Ponte, J., Ní Shúilleabháin, A., & Takahashi E- (2018) *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues*, (pp. 105-122). Cham: Springer.
- Schermer, M. (2010) When Ideas Have Sex. How free exchange between people increases prosperity and trust. *Scientific American*. <https://www.scientificamerican.com/article/when-ideas-have-sex/>
- Schlotterbeck, D., Uribe, P., Araya, R., Jimenez, A., & Caballero, D. (2021) What Classroom Audio Tells About Teaching: A Cost-effective Approach for Detection of Teaching Practices Using Spectral Audio Features. *LAK21*. April 2021 pp. 132–140.
- Schlotterberg, D., Uribe, P., Jimenez, A., Araya, R., van der Molen Moris, & Caballero, D. (in press) TARTA: Teacher Activity Recognizer from Transcriptions and Audio. *22<sup>nd</sup> International Conference on Artificial Intelligence in Education*.
- Siegler, R., & Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries: A microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology: General*, 127(4), pp. 377–397.
- Siegler, R., & Araya, R. (2005). A computational model of conscious and unconscious strategy discovery. In R. V. Kail (Ed.), *Advances in child development and behavior*, (Vol. 33, pp. 1-42). Oxford, UK: Elsevier.
- Soto-Andrade, J. (2018) Enactive metaphorising in the learning of mathematics. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (Eds.). *Invited Lectures from the 13<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education* (pp. 619-638). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
- Uribe P., Jiménez A., Araya R., Lämsä J., Hämäläinen R., & Viiri J. (2020). Automatic Content Analysis of Computer-Supported Collaborative Inquiry-Based Learning Using Deep Networks and Attention Mechanisms. In: Vittorini P., Di Mascio T., Tarantino L., Temperini M., Gennari R., & De la Prieta F. (eds) *Advances in Intelligent Systems and Computing* (vol. 1241, pp. 95-105). Cham, Springer.
- Van Gugt, M., De Vries, L., & Li, N. (2020). The Evolutionary Mismatch Hypothesis Implications for Social Psychology. In J. Forgas, & W. Crano, K.(Eds) *Applications of Social Psychology*. Abingdon, England: Routledge.
- Van Lier, J., Revlin, R., & De Neys, W. (2021). Detecting Cheaters without Thinking: Testing the Automaticity of the Cheater Detection Module. *PLoS ONE*, 8(1): e53827.
- Whitehead, A.N. (1929). *The Aims of Education and Other Essays*. New York. NY: Macmillan.
- Wieman, C. (2017). *Improving How Universities Teach Science. Lessons from the Science Education Initiative*. Harvard University Press. Cambridge, MA.
- Wiemken, R., Pادمي, R., & Matney, G. (2021). Global Connections through Mathematical Problem Solving. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*. 114 (3).
- Willingham, D. (2015). How to teach Critical Thinking. NSW Department of Education.

- Wilson, D. (2019). *This View of Life. Completing the Darwinian Revolution*. New York, NY. New York, NY: Pantheon.
- Wrangham, R. (2019). *The Goodness Paradox. The Strange Relationship Between Virtue and Violence in Human Evolution*. New York, NY: Pantheon.
- Yeap, B., Foo, P., & Soh, P. (2015). Enhancing Mathematics Teachers' Professional Development through Lesson Study – A Case in Singapore. In Inprasitha, M, Isoda, M., Wang-Iverson, P., & Yeap, B. *Lesson Study Challenges in Mathematics Education*. Singapore: World Scientific.