ARTÍCULOS/*ARTICLES*

¿QUÉ SIGNIFICA COMPRENDER UNA IDEA MATEMÁTICA?*

*Roberto Araya***

RESUMEN

Hoy en día el desafío educacional es enseñar para la comprensión. Este desafío es particularmente válido en matemáticas donde existe casi un consenso generalizado que los estudiantes no están entendiendo lo que supuestamente aprenden. Pero enfrentar este desafío requiere entender qué significa comprender un concepto matemático. ¿Cómo es que el cerebro lo hace?. En este trabajo se selecciona evidencia experimental no congruente con la visión tradicional que se tiene sobre la educación y se muestran hallazgos neurofisiológicos recientes muy importantes que apuntan a mecanismos diferentes. A continuación se examina una actividad de aprendizaje específico en aritmética, cuidadosamente medida en laboratorio con decenas de niños. Sobre la base de los hallazgos experimentales y los supuestos mecanismos en juego, se propone un modelo que explica el comportamiento observado en los estudiantes al realizar la actividad. Luego se traduce el modelo en un simulador que al correrlo con varios estudiantes virtuales genera comportamientos razonablemente similares a los medidos en los estudiantes reales. Este simulador, por una parte, obliga a hacer explícito todas las hipótesis de este modelo. Por otra parte, es una herramienta insustituible para poder contrastar el modelo con la realidad. Y, finalmente, una vez obtenido un modelo con buena capacidad de predicción, entonces el simulador permite planificar mejor las actividades de enseñanza.

Introducción

Existe una creciente preocupación de gobiernos, organismos, políticos, profesores y padres por la enseñanza de la matemática. Comparaciones internacionales periódicas muestran que la educación en matemáticas es considerada un pilar clave para el desarrollo económico y social de las naciones. Esta preocupación ha desencadenado una serie de investigaciones sobre el estado actual de la enseñanza de la matemática y los desafíos a enfrentar.

---

* La preparación de este trabajo fue posible por el aporte del proyecto Fondef D99I1049 de la Universidad de Chile.

** Es PhD en ingeniería, gerente general de AutoMind y autor del libro *Inteligencia Matemática. Correo Electrónico: automind@terra.cl*

Diferentes estudios muestran que existen grandes problemas en la enseñanza de la matemática, particularmente en la comprensión de los conceptos. Por ejemplo, Howard Gardner destaca que el problema en el aprendizaje de la matemática es la fragilidad que muestran los estudiantes de su entendimiento de los conceptos matemáticos y considera que esta fragilidad se debe a una enseñanza de la matemática que promueve la práctica de "una aplicación rígida de algoritmos": los estudiantes fijan la atención en consideraciones sintácticas y no en un verdadero entendimiento. Liping Ma, una destacada investigadora educacional que ha comparado el entendimiento de conceptos matemáticos básicos por profesores de educación básica norteamericanos respecto de profesores chinos, concluye que la deficiencia norteamericana se debe a una falta de comprensión profunda de los conceptos matemáticos fundamentales. Según el psicólogo del aprendizaje Kurt Vanlehn, sólo en la simple substracción de números naturales hay más de 120 errores sistemáticos, que en su mayoría derivan de reglas mecánicas que por falta de comprensión profunda el estudiante inicialmente las imita mal y luego las repite y memoriza con errores.

Existe además una percepción de que el aprendizaje superficial sin verdadera comprensión ha ido creciendo en las últimas décadas. Al menos en algunos países la enseñanza de la matemática parece estar decayendo. En Francia, por ejemplo, muchos estiman que en la década de los 70 y 80 la enseñanza era de más calidad y profundidad. Según varios especialistas entrevistados por la revista *Sciece & Vie*, la educación actual lamentablemente no valoriza una verdadera comprensión de nociones, sino sólo la repetición de técnicas algorítmicas estereotipadas. Sin embargo, en una encuesta reciente en Francia realizada por esa misma revista a adultos de 35 a 46 años, muestra que 66% de esa población es incapaz de resolver ecuaciones simples tales como $8x+4=0$ y un porcentaje similar no comprende que diez elevado a seis es un millón. Estos datos parecieran indicar que el problema de enseñar para comprender no es un desafío reciente, y que los métodos tradicionales utilizados en supuestas épocas mejores, en las cuales aparentemente existían mejores profesores y estudiantes, también revelan las mismas deficiencias que se observan actualmente.

Pero entonces si queremos enseñar para una verdadera comprensión, el problema que enfrentamos es comprender qué significa entender profundamente un concepto matemático. ¿Cómo es que el cerebro entiende las ideas matemáticas? ¿Qué diferencia un pensamiento matemático profundo de uno superficial? ¿Qué diferencias cerebrales hay entre esas dos clases de actividades? En definitiva, lo que se requiere es entender los mecanismos cerebrales en juego, y una vez comprendidos algunos de esos mecanismos entonces la idea es aprovechar esos hallazgos para diseñar estrategias de enseñanza que logren mejorar la comprensión profunda de los conceptos matemáticos.

En este artículo planteo que la pobre comprensión que obtienen nuestros estudiantes se debe en parte a nuestras concepciones de cómo el cerebro opera para manejar conceptos matemáticos y cómo el cerebro aprende matemáticas. Bajo esos supuestos enseñamos matemáticas de una cierta manera. Pero esa manera de enseñar está lejos de ser óptima para la forma en que realmente el cerebro funciona y aprende. Si nos detuviéramos un poco en entender cómo realmente el cerebro lo hace y diseñáramos actividades de enseñanza más apropiadas a la forma de aprender, sólo entonces es posible esperar mejoras significativas en el grado de entendimiento que nuestros estudiantes alcancen. El problema es similar al que nuestros antepasados tenían al diseñar máquinas voladoras. Pensaban que el problema era batir las alas tal como los pájaros. Sólo una vez que se fue entendiendo la física de la areodinámica de las alas pudo entonces diseñarse aparatos que volaran. Asimismo, necesitamos entender la verdadera dinámica del pensamiento matemático para poder enfrentar exitosamente el desafío de enseñar para la comprensión.

El plan de este artículo para abordar el desafío es el siguiente. Parto por mostrar varios problemas de carácter matemático que ilustran algunas de las limitaciones de la concepción tradicional del funcionamiento del cerebro en problemas matemáticos. He seleccionado un problema de geometría, otro de lógica y otro de probabilidades. Son tres problemas clásicos y muy estudiados en la literatura de la psicología de la cognición. Son todos problemas aparentemente muy simples, y que a mi juicio dejan claramente al descubierto algunas de las limitaciones de la concepción tradicional. Luego muestro situaciones matemáticas aparentemente complejas, tales como el cálculo de raíces cuadradas, resolución de ecuaciones, modelamiento matemático con sistemas dinámicos, y determinación de valores de verdad de proposiciones con dos o más cuantificadores. Todos esos problemas son, sin embargo, resueltos sin mayor dificultad por niños preescolares.

Con estos dos conjuntos de evidencias (por una parte, problemas simples que resolvemos mal, y, por otra parte, problemas aparentemente complejos que hasta preescolares resuelven bien), pretendo invitar al lector a cuestionar sus concepciones sobre la naturaleza del pensamiento matemático y cómo es que el cerebro comprende ideas matemáticas. Luego presento la aproximación evolucionaria, que a la manera de una brújula nos sirve para orientar el estudio del pensamiento y, en particular, del pensamiento matemático. En breve: tal como cualquier órgano de un organismo biológico, el cerebro debe responder y estar bien adaptado a ciertas necesidades recurrentes que ha tenido que enfrentar nuestra especie por centenas de miles de generaciones. El entendimiento de esos requerimientos nos da pistas muy importantes para comprender el cerebro, y para entender las habilidades y limitaciones que posee para resolver problemas matemáticos. Luego exploro algunos de los nuevos hallazgos en neurociencias cognitivas que complementan el análisis evolucionario y que nos dan pistas adicionales para entender porqué algunos problemas nos son más fáciles que otros y para entender cómo es que el cerebro comprende algunas ideas matemáticas. En el libro *Inteligencia Matemática* aprovecho estos hallazgos y nuevas ideas para proponer algunas actividades para la enseñanza de la aritmética, fracciones, álgebra y estadística.

A continuación examino y propongo un modelo detallado para entender y explicar una actividad específica de aprendizaje en matemáticas. La actividad, realizada en condiciones de laboratorio con decenas de niños de segundo grado de enseñanza básica, fue diseñada, ejecutada y analizada por los psicólogos del desarrollo Robert Siegler de la Universidad de Carnegie Mellon y Elsbeth Stern del Instituto Max Planck. Esta experiencia ha sido efectuada con mediciones muy cuidadosas que van mucho más allá de lo que se puede realizar en una sala de clases normal, lo que la convierte en una excelente fuente de información sobre la cual contrastar las predicciones de cualquier teoría o modelo.

Varios importantes fenómenos fueron encontrados y reportados por Siegler y Stern, entre los que se destacan los siguientes: uso de varias estrategias de resolución por cada estudiante, mejoramiento progresivo de desempeño, regresiones pasajeras a prácticas anteriores más ineficaces, descubrimientos de nuevas estrategias, emergencia esporádica de resoluciones inconscientes en que el estudiante lo hace bien pero no puede verbalizar cómo lo logró, interrupciones y cambios de estrategia, dependencia de patrones de comportamiento frente a diferentes tipos de secuencias de problemas, diferencia de comportamiento por pasar a otra sesión en otro día versus continuar en la misma sesión, etc.

El modelo propuesto se implementó en un simulador computacional, en el cual se puede simular un estudiante virtual o todo un grupo de estudiantes virtuales. El simulador genera el comportamiento observable de cada estudiante virtual para cada ensayo. El comportamiento está dado por la respuesta a cada problema, el tiempo de respuesta, la estrategia utilizada, y eventuales interrupciones. También genera comportamientos no directamente observables, entre los que se encuentran los siguientes: recursos atencionales, intensidades de estrategias, grado de discriminación de características perceptuales de los problemas, estado de memorias de trabajo, estados de memorias de largo plazo, lugares sobre el cual el sujeto va posicionando su atención visual en la medida que avanza en la resolución del problema, sucesión de ejecución de acciones motoras y de acceso a memoria, etc.

El artículo concluye con una comparación entre la experiencia con estudiantes y las predicciones del modelo a través del uso del simulador. La correspondencia es razonablemente buena, pues no sólo se logran patrones de comportamientos generales similares, sino que también se obtienen mediciones cuantitativas similares, y los principales fenómenos logran reproducirse. Adicionalmente, el proceso de modelamiento y simulación obligó a un conocimiento más profundo del fenómeno del aprendizaje, todo lo cual dio lugar a varias predicciones y sugerencias que serán necesario estudiar en una nueva ronda de mediciones experimentales.

La idea de un simulador puede parecer extraña. Sin embargo, en casi todas las ramas de la ciencia y tecnología es normal encontrar simuladores. Existen desde simuladores de vuelo hasta de hornos, tráfico de aeropuertos, y ahora recientemente son cada vez más comunes en biología (simuladores de bacterias y células) y neurociencias (simuladores del sistema visual, olfativo, etc.). Construir un simulador no sólo es un excelente ejercicio que obliga a hacer explícito todos los componentes y mecanismos que permitan explicar un fenómeno, sino que nos asegura que al menos todos esos elementos sean efectivamente suficientes para generar algunos aspectos esenciales del fenómeno. Este punto no es trivial, pues muchas teorías no pueden siquiera generar una secuencia temporal básica de las variables medibles del fenómeno estudiado. Es decir, una primera meta es poder generar una dinámica, algo que efectivamente vaya cambiando. Esta primera meta no se trata de que el fenómeno simulado se parezca al real, sino tan sólo que se genere algo que sea una sucesión de estados. Una vez cumplida esta fase no trivial, entonces nos podemos preocupar de la segunda meta: que la secuencia de estados tenga componentes que se relacionen con lo medible y que la evolución de esas componentes se parezca a lo que se mide en la realidad. Este meta es mucho más ambiciosa. Pero en la medida que nos acerquemos a ella, podemos pasar a la siguiente meta. La tercera meta es todavía mucho más ambiciosa: contar con un simulador que sea una herramienta confiable con la cual un profesor puede simular una clase y averiguar cuál serán las respuestas que logrará de los estudiantes ante diferentes formas de enseñarla. Esto puede parecer ciencia ficción, pero es lo que distingue una pedagogía científica de una práctica basada sólo en ensayo y error y en una intuición con fundamentos muy limitados.

Problemas aparentemente simples que resolvemos mal

Problema 1 (geometría):

> *Observe estas dos mesas. ¿Tienen la misma forma? O más precisamente, ¿Son del mismo ancho y del mismo largo?*

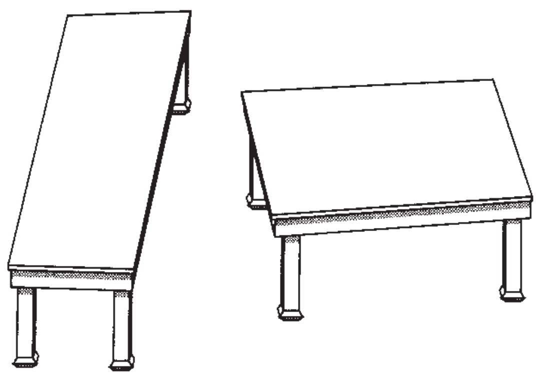

Figura 1: Mesas a comparar

> *Ahora mida con una regla tanto el ancho como el largo, y compruebe que son iguales. ¡Sí, son del mismo ancho y del mismo largo! Ahora que sabe que son iguales, vuelva a observar las dos mesas. ¿Cómo percibe ahora las dos mesas? ¿Son iguales o no?*

Este es mi ejemplo preferido, pues a pesar de que la lógica le dice a uno que ambas mesas miden exactamente lo mismo, sin embargo uno las ve muy diferentes. Ya este ejemplo sugiere que el pensamiento no es secuencial, sino que hay al menos dos mecanismos paralelos, uno lógico y otro perceptual, y que estos dos mecanismos están compitiendo entre sí.

Problema 2 (lógica de proposiciones): Presentamos dos formulaciones equivalentes:

> **Formulación 1**: Dada la siguiente proposición
>
> "*Si tengo la mano cerrada entonces tengo una moneda*
> *o si no (o exclusivo)*
> *si tengo la mano abierta entonces tengo una moneda*"
> *¿Qué se deduce?*

Formulación 2: Si una y sólo una de las dos proposiciones siguientes es verdadera:

"*Si tengo la mano cerrada entonces tengo una moneda"*
"Si tengo la mano abierta entonces tengo una moneda"
¿Qué se deduce?

La mayoría de nosotros ve como evidente que lo que se deduce de inmediato es que el sujeto tiene una moneda. Sin embargo, si se procede con mucho cuidado se puede demostrar que lo que lógicamente se deduce es que **no** tiene una moneda. Veamos la demostración. Supongamos que se tiene una moneda, entonces las dos proposiciones de la formulación 2 son implicaciones en las que la conclusión es verdadera. Si uno va entonces a la definición del conectivo implicación (el entonces), verá que si la conclusión es verdadera entonces toda la proposición es verdadera. Y entonces ambas proposiciones son verdaderas, lo que contradice al hecho que sólo una lo es. Por lo tanto la afirmación "tengo una moneda" no puede ser verdadera. Es decir, es falsa. O sea, lo que se concluye de acuerdo a la lógica es que no tengo una moneda.

Mucha gente tiene problemas de seguir el razonamiento de la demostración anterior, y por lo tanto se queda sólo con la conclusión inicial inmediata sin poder apreciar la dificultad y el desafío que este problema representa. En todo caso la situación es similar a la del problema geométrico, pues por una parte uno "ve" inmediatamente la conclusión "tengo una moneda" al igual que uno ve inmediatamente que las dos mesas son de diferente largo y ancho. Pero, por otra parte, al ejecutar paso a paso un plan lógico riguroso uno llega a la conclusión opuesta, tal como lo que ocurre en el ejemplo geométrico que al ejecutar un plan de mediciones uno concluye lo opuesto: las mesas miden lo mismo.

Problema 3 (Probabilidades): A continuación mostraré tres formulaciones equivalentes de un problema de probabilidades.

Formulación 1*: Tengo tres tarjetas: una blanca por ambos lados, una roja por ambos lados y la tercera es blanca por un lado y roja por el otro. Si saco y le muestro una de las tres tarjetas y usted puede ver un solo lado y éste es rojo. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro lado sea también rojo?*

Formulación 2: *Tengo 6 ladrillos (3 rojos y tres blancos) que se han pegado formando los tres ladrillos dobles que se muestran a continuación:*

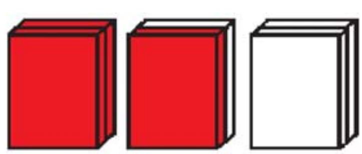

Figura 2: Seis ladrillos pegados en pares

Si saco un ladrillo doble y se lo muestro, y usted ve una sola cara y ésta es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro lado sea también rojo?

Formulación 3: *Tengo 6 ladrillos (tres rojos y tres blancos): dos ladrillos rojos están en el frasco A, uno blanco y uno rojo están en el frasco B, y dos ladrillos blancos están en el frasco C, tal como se muestra en la figura.*

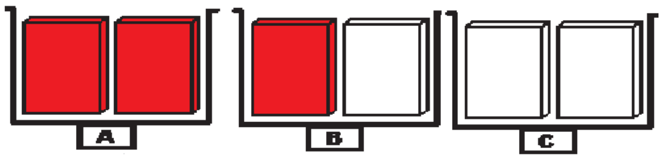

Figura 3: Seis ladrillos en tres frascos.

Si saco un ladrillo y se lo muestro y éste es rojo. ¿Cuál es la probabilidad de que provenga del frasco A?

Lo interesante de este problema es que la mayoría de la gente se equivoca al resolver el problema en la formulación 1. Sin embargo, con la formulación 2, que es totalmente equivalente, mucho menos gente se equivoca. Y con la formulación 3, que también es totalmente equivalente a las anteriores, todavía mucho menos gente se equivoca. Entonces, ¿Cómo es posible que el mismo problema matemático pasa de difícil a fácil por meras cuestiones accesorias?

Estos tres problemas nos llevan a cuestionarnos sobre los mecanismos cerebrales. ¿Porqué espontáneamente el cerebro crea ciertas soluciones, las ve como evidentes, y le cuesta darse cuenta de las soluciones correctas? De alguna forma los procedimientos o algoritmos que el cerebro sigue no son los que la lógica estricta nos dice. El cerebro no parece ser un filtro neutro, tiene claras preferencias por ciertos tipos de argumentos o cálculos. En otras áreas tiene grandes dificultades, es más lento y comete muchos errores, incluso efectúa errores sistemáticos que le cuesta mucho reconocer como errores y comprender que hay dificultades.

Problemas aparentemente complejos que resolvemos bien

Hemos visto tres problemas aparentemente simples. Estos problemas inmediatamente nos llevan a ciertas soluciones, pero un análisis más cuidadoso muestra que esas soluciones eran totalmente equivocadas. Ahora examinemos otros cuatro problemas, pero esta vez los problemas escogidos son tradicionalmente considerados como problemas complejos, totalmente inalcanzables para preescolares o incluso para estudiantes de enseñanza básica. Veremos, sin embargo, que los preescolares los pueden entender y resolver correctamente.

Problema 4 (concepto de raíz cuadrada):

Calcule o haga una estimación de la raíz cuadrada de 25 y una de la raíz cuadrada de 10.

La mayoría de la gente considera que la noción de raíz cuadrada es compleja, que si bien puede calcular la raíz cuadrada de 9, de 16 o 25, sin embargo no entienden bien qué significa, no pueden dar una buena estimación de la raíz cuadrada de 10, ni mucho menos explicar para qué sirve este concepto. Lo interesante e increíble es que si presentamos el concepto de raíz cuadrada de otra forma, entonces hasta niños preescolares que aún no pueden contar pueden sin embargo entender la noción de raíz cuadrada. Veamos una formulación alternativa:

Imagina que tienes 4 dulces y ordénalos en hilera tal como en la figura.

Figura 4: Cuatro dulces

Ahora forma con ellos un cuadrado perfecto. El número de dulces que forman los lados del cuadrado es la raíz cuadrada de 4.

Figura 5: Cuatro dulces formando un cuadrado.

Puesta adecuadamente, esta pregunta la pueden entender hasta niños de 3 años, y pueden generalizar la idea para 9, 16 o 25 dulces, que es prácticamente infinito para ellos. Un aspecto muy importante es que no sólo ellos logran entender el concepto, si no que algunos incluso inventan espontáneamente estrategias para efectuar el rearreglo de los dulces en forma ordenada y eficiente. Es decir, inventan algoritmos de cálculo. En el caso de estudiantes mayores, de enseñanza media, una vez visto un par de ejemplos con dulces para calcular raíces como las de 9 y 16, muchos inventan espontáneamente estrategias para aproximar la raíz cuadrada de 10, tal como se muestra en la figura en donde se divide un dulce sobrante en 6 partes y se adosa a un cuadrado de 3 por 3 calugas obteniéndose un casi cuadrado de 3 dulces y un sexto por 3 dulces y un sexto.

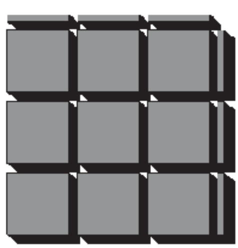

Figura 6: Diez dulces formando un casi cuadrado

Esta aproximación es muy buena pues 3 1/6 es con cuatro decimales 3.1667 y la raíz cuadrada de 10 aproximada con cuatro de decimales es 3.1623.

Problema 5 (álgebra y ecuaciones):

Resuelva la ecuación 2x+1=7.

Este tipo de ecuaciones se comienza a estudiar en séptimo u octavo grado de enseñanza básica. Muchos estudiantes nunca comprenden bien qué están haciendo cuando manipulan los símbolos, y por lo tanto perciben al álgebra como un conjunto de ejercicios simbólicos que no les servirán para nada en su vida personal o profesional. La ven sólo como una barrera académica necesaria para pasar cursos y para poder ingresar eventualmente a la universidad o a la educación técnica superior.

Veamos una formulación con material concreto y cómo estudiantes preescolares pueden entender la ecuación $2x + 1 = 7$ y su resolución.

Reordena 7 dulces como dos columnas iguales más un dulce suelto.

Esta interpretación ya ayuda a muchos estudiantes y les permite encontrar la solución inmediatamente. Sin embargo, la noción de variable x puede seguir siendo resbaladiza. La siguiente formulación ayuda aún más a concretizar esa noción.

Imaginamos una variable x como una caja (contenedora de dulces) de forma rectangular y de ancho la unidad, entonces le podemos dar a la noción de variable un contenido concreto y manipulable físicamente.

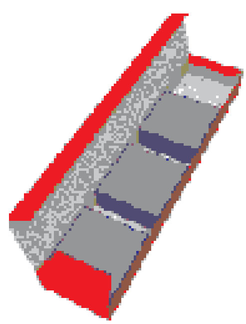

Figura 7: Caja que representa x

Es decir, x denota una caja contenedora y por lo tanto es un objeto distinto del número de dulces que contiene. Desaparece entonces la aparente contradicción que mucha gente percibe por el hecho de que x es variable y luego del ejercicio resulta que tiene un valor, por ejemplo x=3 (es decir, no era tan variable). Adicionalmente, algo etéreo e intangible como una variable, pasa a ser un objeto, en una transformación que el matemático Ed Dubinsky llama “encapsulación”. O sea, acciones o procesos, pasan a conceptualizarse como objetos, y sobre estos objetos se pueden a su vez ejecutar acciones. Esta transición y su inversa ("desencapsulación") son según Dubinsky componentes críticos en el aprendizaje de la matemática, y estas representaciones físicas y visuales ayudan a ese proceso de transición. Utilizando los dulces y las cajas, niños pequeños pueden resolver la ecuación $2x+1=7$ si se plantea de la siguiente forma:

> *Se presentan 7 dulces dispuestos sobre una mesa en forma desordenada y se le dice al niño que la mamá las repartió entre las 2 cajas mellizas (que contienen exactamente lo mismo) pero que un dulce quedó afuera (las dos cajas y el dulce suelto se muestran en otro sector de la mesa). La pregunta es: si tomo una de las cajas mellizas ¿cuántos dulces contiene? Dado que el preescolar no sabe contar ni reconoce numerales, para que responda se le presenta un menú con tres opciones: la primera opción es una caja con un dulce, la segunda opción es una caja con 2 dulces y la tercera opción es una caja con tres dulces, y se pide escoger cuál corresponde a la solución.*

Nótese que esta forma de plantear el problema no requiere que el estudiante sepa contar.

Problema 6 (sistemas dinámicos): Un sistema dinámico es uno en el cual se especifica el comportamiento a través del tiempo de un objeto mediante una serie de reglas. Si esas reglas especifican completamente cada movimiento entonces se dice que es determinístico. Normalmente estos sistemas se estudian en física y para ello se utilizan reglas especiales denominadas ecuaciones diferenciales. Sin embargo, el concepto de sistema dinámico puede introducirse hasta con niños de 5 años, que a esa edad están recién aprendiendo a leer y a reconocer los primeros números.

A continuación presentamos una situación que sólo requiere manejarse con los números entre 0 y 15. Es un caso ultra sencillo de sistema dinámico, pero contiene parte importante de los elementos conceptuales de sistemas más sofisticados. Por otra parte, este es un sistema muy concreto y real, pues pretende emular en parte el comportamiento de una bacteria.

> *Imagínate un mundo bidimensional y cuadriculado, tal como un tablero de ajedrez. En cada casillero hay un número que indica la cantidad o concentración de comida. Imagínate además que en cada tick de nuestro reloj (cada minuto, por ejemplo) una bacteria se mueve dando un paso de un casillero a un casillero vecino. El casillero vecino seleccionado para donde moverse es el que tiene más comida, siempre y cuando haya más comida que donde está. Si no, no se mueve. Si la bacteria está en el primer casillero de arriba a la izquierda del mundo dibujado en el tablero siguiente, entonces ¿qué trayectoria sigue? Dibújala con un lápiz sobre el tablero.*

Niños pequeños pueden dibujar las trayectorias de diferentes bacterias colocadas inicialmente en un casillero dado. Por ejemplo, una bacteria ubicada en el

0	1	1	5	4	3	3	4	7	1
1	2	2	2	4	4	5	4	4	2
1	3	2	3	4	4	4	3	3	3
2	3	4	4	4	5	5	4	4	3
2	4	4	5	5	5	6	6	5	5
2	4	5	5	6	5	6	6	4	4
2	4	6	6	6	7	6	6	4	4
2	4	6	15	10	9	7	5	5	15
2	4	6	7	9	9	7	7	5	14
2	4	5	6	7	8	9	8	8	13
1	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	2	3	4	6	8	8	5	4	2

casillero superior izquierdo. La trayectoria dibujada es lo que se llama la solución del sistema dinámico para esa condición inicial.

Tratemos de describir las reglas del movimiento de la bacteria. La posición de la bacteria en el instante siguiente (o sea x(n+1)) es la posición en el instante actual (o sea x(n)) más un paso que se calcula a partir de la cantidad de comida en la posición actual y la de los 8 (o a veces menos) casilleros vecinos. Este paso se calcula tomando diferencias, escogiendo la mayor de todas y luego viendo si es positiva o no. Si es positiva se avanza al casillero siguiente en esa dirección. Llamemos a este paso dif(comida_vecinos(x(n))), para indicar que depende de la *diferencia* con sus vecinos de la *comida* en casillero actual x(n) y sus vecinos. O sea, en forma resumida:

x(n+1)=x(n)+dif(Comida_Vecinos(x(n))

Esta forma de escribir de manera resumida la regla de comportamiento es la descripción típica que se usa en el lenguaje de los sistemas dinámicos a tiempo discreto (es decir, del instante n pasamos al instante n+1), y en un mundo discreto (pues es un tablero). Si imaginamos un mundo como un tablero muy fino, con muchos casilleritos, y también con ticks de tiempo muy cortos (décimas de segundos, por ejemplo), nos aproximamos a la noción de sistemas dinámicos continuos descritos por ecuaciones diferenciales, que son los que se usan típicamente en física.

Nótese que aquí se ha descrito en forma explícita un mecanismo bien preciso que genera el movimiento. La variable x se denomina el estado del sistema y representa todo lo que necesitamos saber para pasar al estado siguiente. De alguna forma x resume toda la historia, y no agregamos nada con conocer la historia previa para calcular la posición siguiente. Jugando con diferentes tableros con otras configuraciones de números, o más aún, con reglas un poco diferentes, es posible introducir a pequeños niños no sólo a los conceptos de sistemas dinámicos sino que también a las nociones de modelamiento matemático. Nuevamente, hemos encontrado una forma en la cual conceptos matemáticos tradicionalmente considerados como muy complejos, pueden sin embargo ser manejados sin dificultad por preescolares.

Problema 7 (lógica con cuantificadores): Tal como hemos visto en el problema 2, planteamientos con proposiciones muy simples pueden inducirnos a razonamientos completamente equivocados. Veremos ahora la situación inversa, donde proposiciones con cuantificadores existenciales que típicamente se consideran suficientemente complejos como para que sólo se estudien en cursos universitarios, pueden sin embargo ser entendidos y manejados por niños preescolares.

¿Es cierto o no?
En toda caja existe al menos un círculo obscuro _______
Existe una caja con cero círculos _____
En tres cajas existen al menos dos círculos obscuros _____
La caja con más círculos sólo tiene círculos obscuros ______
Toda caja con círculos blancos tiene también al menos un obscuro ___
Toda caja con círculos obscuros tiene también al menos uno blanco ___

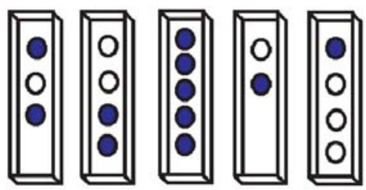

Figura 8: Cajas con círculos

Este tipo de problemas no presenta gran dificultad para estudiantes preescolares o de enseñanza básica. Las proposiciones más complicadas son las dos últimas, pero aún así muchos niños las entienden. En realidad, la mayor dificultad parece ser la lectura de cada frase.

Hemos revisado siete problemas. Los tres primeros son aparentemente triviales, pero muy poca gente los resuelve bien. Los cuatro problemas siguientes son típicamente considerados como problemas que involucran temas conceptualmente muy complejos y avanzados. Sin embargo, hemos visto que planteados en una forma adecuada, los pueden entender y resolver estudiantes de 5 años de edad.

Estos siete problemas cuestionan nuestras concepciones de qué es fácil y qué es difícil en matemáticas: pareciera que es más difícil aprender a contar más allá de tres que comprender el concepto de raíz cuadrada y el de ecuación, que es más difícil aprender los numerales y la notación posicional más allá de nueve o aprenderse las tablas de multiplicar que aprender la noción de sistemas dinámicos o el de cuantificadores lógicos. Estos hallazgos nos hacen cuestionar qué y cómo enseñar la matemática, qué es primero y qué debería venir después. Adicionalmente, estos siete problemas nos ilustran la naturaleza del desafío que significa entender cómo el cerebro trabaja para enfrentar problemas matemáticos.

Perspectiva evolucionaria: ¿Para qué está realmente hecho el cerebro?

El plan de esta sección es el siguiente. Al comparar organismos sin sistema nervioso con aquellos que lo tienen nos lleva a concluir que la primera capacidad básica del sistema nervioso es la coordinación de movimientos. Luego analizamos el pensamiento y concluimos que es prácticamente igual a coordinar movimientos pero donde al final no se produce movimiento real; es sólo movimiento virtual. A continuación analizamos cómo aprendemos de otros, lo que nos lleva a estudiar la imitación de actos. Revisamos algunos actos típicos de los primates (manejo de objetos con las manos) y cómo se secuencian formando estrategias para resolver problemas. Estudiamos la interrupción de secuencias en ejecución y la emergencia de estructuras dentro de las secuencias de actos (la composicionalidad y la sintaxis). Analizamos cómo esos mismos mecanismos son los que hereda el ser humano para coordinar las complejas secuencias de actos motores con la laringe, cuerdas vocales y lengua. Con los actos bucales se generan ruidos, y con ellos se pueden marcar secuencias y conceptos. El conjunto de marcas junto a su estructura composicional y sintáctica conforman el lenguaje. El paso siguiente es marcar con objetos externos. Esto corresponde a la escritura, una memoria no biológica, que hace posible la producción de estrategias y conceptos de mucho mayor sofisticación. Y así llegamos a la matemática, un lenguaje escrito, especialmente ajustado para describir patrones de fenómenos, sus componentes, y las relaciones entre ellos.

Movimientos en un mundo de tres dimensiones

El sistema nervioso y el cerebro es una solución a requerimientos recurrentes que nuestra especie y muchas otras especies con sistemas nerviosos han enfrentado por millares de generaciones. Entender el cerebro parte por comprender esos requerimientos. Saber para qué problemas el cerebro está especialmente diseñado es una gran ayuda para luego intentar entender cómo el cerebro funciona. Partimos por observar que los organismos sin sistema nervioso son prácticamente inmóviles. Por ejemplo, las plantas y árboles no tienen sistema nervioso y prácticamente no se mueven. Similarmente, bacterias y otros microorganismos se mueven, pero el movimiento es muy lento comparado con el movimiento y tiempos de respuesta de animales con sistema nervioso. Según el neurocientista Rodolfo Llinás el cerebro es necesario sólo para criaturas que se mueven activamente.

Llinás y el filósofo de la mente Daniel Dennett, citan el caso extremo de la juvenil jeringa de mar que da vueltas por el océano buscando una roca adecuada o un buen montón de coral donde asirse y formar su hogar para vivir. Para esta tarea posee un sistema nervioso rudimentario. Cuando encuentra su lugar y hecha raíces, ya no necesita más su cerebro, así que se lo come.

En resumen, el cerebro es, primero y antes que nada, un órgano para controlar el cuerpo biológico. La mente comanda movimientos, y lo debe hacer rápido, antes que el predador la agarre, o antes que su presa se le arranque. Esta perspectiva nos sugiere que, para estudiar el pensamiento abstracto, debemos comenzar por enfocar nuestra atención en representaciones visuales y motrices. Debemos buscar la conexión entre cognición y movimiento, y en sus correspondientes procedimientos o algoritmos.

La percepción visual de que las mesas del problema geométrico son diferentes es generada por los algoritmos cerebrales para la visión y navegación. A partir de una imagen bidimensional formada en la retina estos algoritmos deben estimar la forma de un objeto en tres dimensiones. Los algoritmos se basan en una serie de supuestos que no son siempre válidos, pero en las condiciones típicas en las que se desenvolvían nuestros antepasados esos supuestos se cumplen y entonces allí los algoritmos generan soluciones que funcionaban bien. En una situación atípica y extrema como la planteada en el problema, esos algoritmos nos llevan a una percepción equivocada. Sólo al ejecutar otro tipo de acciones, tal como mediciones, o traslaciones y rotaciones de las mesas, podemos darnos cuenta que la percepción es en realidad una ilusión.

Es decir, el cerebro contiene una serie de algoritmos especialmente adaptados para ciertos problemas, que son los problemas recurrentes que por decenas de miles de generaciones hemos tenido que enfrentar para sobrevivir. Si enfrentamos el cerebro a problemas distintos, fuera del rango de los problemas típicos y recurrentes que por decenas de miles de generaciones ha enfrentado, entonces no es seguro que esos algoritmos nos den la solución correcta, y muy posiblemente dos o más de ellos nos pueden entregar dos o más soluciones diferentes que estarán compitiendo en nuestra mente.

Pensamiento es movimiento virtual

Para continuar nuestro acercamiento a entender el pensamiento abstracto comencemos por averiguar qué hace el cerebro cuando se imagina o simula mentalmente algo. Por ejemplo, cuando se imagina que está viendo un objeto, o cuando se imagina tocando piano. Una pista importante lo entregan las tomografías cerebrales que indican que al imaginarse un objeto los mecanismos neuronales utilizados son en gran parte los mismos que cuando el individuo ve el objeto directamente. El neurofisiólogo Yasushi Miyashita, destaca que al solicitar imaginar el Partenón griego y contar sus columnas, entonces en el sujeto se produce un flujo de actividad desde los centros cerebrales superiores hacia la corteza visual justo en sentido opuesto a cuando se ve directamente el objeto, y ese flujo llega incluso a activar las primeras áreas visuales de la corteza, aquellas en que la activación es todavía topográficamente similar a la imagen del objeto. Es decir, un estímulo verbal genera acciones visuales equivalentes y utilizando los mismos recursos neuronales que cuando se ve directamente. Similarmente, al imaginarse tocando piano u otro objeto el cerebro activa mecanismos neuronales motores similares a cuando ejecuta efectivamente esa acción. Este fenómeno llega a tal punto que el grupo de neurocientistas liderado por Alvaro Pascual-Leone ha comprobado que imaginarse practicando piano durante cinco días por dos horas diarias en las que se simula mentalmente el movimiento de los dedos produce los mismos cambios plásticos neuronales en el sistema motor que la práctica real moviendo los dedos, y que el efecto de esta práctica puramente mental se refleja luego en un mejor desempeño al tocar piano.

Estos hallazgos nos indican que existe una fuerte conexión entre el pensamiento y los mecanismos neuronales perceptuales y motores. Sólo el hecho de imaginarse haciendo algo activa esos mecanismos neuronales y logra mejorar las destrezas motoras. Es entonces de esperar que, a la inversa, para una cierta idea o concepto existan acciones perceptuales y/o motoras específicas que al ejecutarlas una o más veces ayuden al aprendizaje y a la comprensión de esa idea o concepto. Este punto es crucial. Es una pista muy importante no sólo para entender el fenómeno de comprensión sino que también es un dato muy importante que hay que tener presente al diseñar actividades pedagógicas específicas que ayuden a una comprensión verdadera de los diferentes conceptos matemáticos.

El desafío entonces es: para cada uno de los conceptos matemáticos fundamentales encontrar las acciones perceptuales motoras u otras acciones primarias (lingüísticas y/o sociales) en las que el concepto estaría basado. Esta conexión puede no ser directa, y seguramente lo que existe es una compleja red de conexiones entre conceptos entre sí y que sólo en algunos puntos hay conexiones con mecanismo perceptuales-motores. Stevan Harnard, visualiza el mundo abstracto de ideas como uno en el cual ciertas categorías se van formando a partir de discriminaciones perceptuales motoras que el sujeto adquiere directamente pero muchas otras las adquiere de terceros sin necesidad de aprenderlas perceptualmente por sí mismo. La compleja red que se forma hace que muchos conceptos tengan una relación lejana con acciones percepuales motoras, pero eso no significa que no existan. Debemos, entonces, buscar formas de presentar los conceptos haciendo más evidente la conexión con acciones primarias.

Otro aspecto muy importante que es necesario tener en cuenta es que el cerebro ante situaciones o conceptos nuevos busca y aprovecha en forma oportunística recursos y algoritmos que en realidad estaban diseñados evolucionariamente para otros fines. Por ejemplo, la visión y sus algoritmos procesan palabras escritas con bastante comodidad a pesar que esos mecanismos no fueron diseñados para ese tipo de tareas. Sin embargo, un diseño desafortunado de tipos de letras o del espaciamiento entre letras puede hacer degradar significativamente la lectura de textos. Esto significa que debemos constantemente buscar las formas para las cuales el cerebro funcione lo mejor posible. La idea es ayudar al cerebro a que para nuestros fines matemáticos pueda aprovechar bien los algoritmos que posee y que estaban diseñados para otras funciones.

Imitación y manipulación de objetos y herramientas

El cerebro es una máquina especializada para el movimiento y la navegación. Sin embargo, al recorrer la escala evolutiva aparecen sistemas nerviosos más complejos con subsistemas especializados que resuelven ciertos problemas específicos recurrentes y que les permitieron a las especies que los poseen ocupar nuevos nichos ecológicos. Existe hoy en día evidencia de la existencia de la capacidad de cierto grado de imitación en muchos animales. El biólogo Lee Alan Dugatkin ha diseñado elegantes experimentos que demuestran la imitación de estrategias de selección sexual por peces de pecera, a pesar de ser animales con cerebros minúsculos. El fenómeno de imitación en peces es de tal importancia e intensidad que estrategias imitadas pueden llegar a competir con estrategias innatas diametralmente opuestas. Dugatkin estima que la imitación como forma de transmisión cultural lleva a cuestionar el origen exclusivamente genético que hasta ahora se suponía era el que originaba las diferentes conductas animales, y que esta creciente evidencia muestra que "la cultura no es sólo para animales superiores, ni es un signo de inteligencia".

Sin embargo, sólo en primates superiores aparece la imitación de conductas más complejas, especialmente aquellas ejecutadas con las manos, y para las cuales tenemos evidencia de mecanismos especializados. Según el primatólogo Frans de

Waal, los chimpancés jóvenes adquieren la compleja habilidad de usar piedras para partir nueces en un lento proceso de imitación que dura varios años de práctica antes de lograr ejecutar la acción con éxito.

Existe abundante evidencia que nuestra especie se destaca sobre las otras por sus habilidades manuales. Sólo primates superiores como los chimpancés, gorilas y orangutanes se le acercan en la capacidad de manipulación de objetos y uso de herramientas. Por otra parte, las zonas de la corteza cerebral (tanto sensoriales como motoras) conectadas con las manos ocupan un gran espacio en comparación al espacio dedicado a otras zonas superficiales del cuerpo. Sólo el espacio dedicado a la cara le es comparable. Esto refleja una gran cantidad de recursos dedicados a las manos y las acciones que con ellas realizamos.

En una serie de fascinantes estudios experimentales con monos macacos, los neurocientistas Giacomo Rizzolatti y Vittorio Gallese han logrado localizar conjuntos de neuronas involucradas con acciones motoras manuales y bucales específicas, que nos dan una importante pista entre actividad cognitiva y actividad motora manual y bucal.

Por una parte, Rizzolatti y Gallese encontraron que existen neuronas (que llamaron neuronas "espejo") que sólo se disparan cuando un agente interacciona con un objeto, pudiendo ser el agente el mismo sujeto (el mono) o un tercero (un experimentador humano). Por ejemplo, existe un grupo de neuronas que se activan exclusivamente cuando una mano agarra un objeto, sea ésta una mano propia o de un tercero. Es decir, esas neuronas no se disparan cuando el sujeto ve el objeto o ve una mano. Tampoco se disparan si el objeto es tomado con pinzas o con alguna otra herramienta. Se disparan sólo en el momento en que la mano agarra el objeto, sea ésta la mano del mono, de otro mono o de un humano. Y tampoco importa cuál es el objeto agarrado, ni su tamaño, forma o color.

(a) (b)

Figura 9 (a): activación de neuronas espejo en actor y observador

(b) activación de las mismas neuronas espejo en observador al ejecutar la misma acción que vio realizar al actor.

Las neuronas de agarre están en realidad especializadas según sea el modo de agarre. Algunas se activan sólo para la aprehensión con los dedos, otras para la aprehensión con la mano completa, otras para el agarre con precisión, etc. Existen también otros grupos neuronales asociados a otras acciones agente-objeto. Por ejemplo, un grupo de neuronas se activan sólo al colocar un objeto en un lugar, otro grupo distinto se activa exclusivamente al manipular un objeto, otro al sostenerlo, etc. Estos otros grupos neuronales también se especializan en mucho mayor detalle según tipos específicos de acción.

Adicionalmente, algunas de estas neuronas espejo se activan independientemente si el agente corresponde a una mano o a una boca, siempre y cuando la intención de la acción sea la misma. Este fenómeno es notable, por cuanto una mano es muy distinta de una boca, y por lo tanto la activación indica que estas neuronas se fijan sólo en el tipo de acción perseguida y no en cómo es implementada.

Según Rizzolatti y Gallese, las neuronas espejo forman un sistema de aparejamiento entre observación y ejecución de acciones motoras. Aparejamiento que permitiría el aprendizaje por imitación. Es decir, la activación de un grupo específico de neuronas le indicaría al sujeto: *si lo que él hace es lo que justo acaba de ver hacer por un tercero*. Este es un hecho con enormes implicaciones, pues no sólo nos revela una de las bases neuronales del aprendizaje, si no que también nos indica cuáles son las acciones más básicas que componen el proceso de aprendizaje. Algo así como los átomos de la imitación y del aprendizaje.

En otras palabras, este simple sistema de aparejamiento nos indica cuáles son las acciones motoras “agente-objeto” que tienen grupos neuronales dedicados exclusivamente a su identificación, sin necesidad de más procesamiento. Sin intermediarios. Por el contrario, otras acciones que no poseen grupos neuronales directamente encargados de su identificación, requieren algoritmos compuestos, con cadenas más largas de procesamiento, y que por lo tanto involucrarán otras áreas cerebrales y métodos más indirectos. Así, el aprendizaje de esas otras acciones, requerirá mucho mayor esfuerzo y tiempos de práctica más prolongados.

Pero las neuronas espejo no sólo están involucradas en la imitación sino que también en el entendimiento de acciones. Este punto recientemente descubierto es de gran significación para entender cómo es que comprendemos. Experiencias en que se muestra un acto de agarre de un objeto pero donde una parte de las acciones están escondidas tras una cortina, muestran que una proporción de las neuronas espejo siguen disparándose. Esto es, el sujeto supo lo que el otro hizo a pesar de que no vio el acto completo. Es decir, no se necesita la observación directa de todo el acto, de alguna manera esas neuronas codifican el significado del acto. Más aún, tomografías cerebrales en humanos muestran que ciertas neuronas premotoras del sistema espejo se disparan más activamente al pedírsele al sujeto comprender un acto de agarre que cuando se le solicita sólo la imitación del acto. Según Rizzolatti, Fogassi y Gallese aquí estaría el mecanismo neurofisiológico subyacente a la compresión de actos. Las neuronas espejo y los actos que ellas codifican son excelentes aliados para diseñar estrategias de enseñanza para la comprensión en matemáticas.

Imitación y comprensión de actos con las manos o la boca pueden parecer alejados a las acciones abstractas que se siguen en matemáticas. Sin embargo, ya hemos visto que los movimientos de agarre y ordenamiento de dulces para formar cuadrados perfectos son no sólo inmediatamente imitados sino que también comprendidos. La compresión verdadera se comprueba por el hecho que los preescolares generalizan el procedimiento para números diferentes. Es decir, hay algo particular en una secuencia de actos ejecutadas con las manos: como por arte de magia las personas entienden procedimientos que de otra forma parecen muy complejos. Cuando se explica un algoritmo aritmético con objetos concretos que se mueven con la mano, entonces el grado de comprensión aumenta radicalmente. Otro ejemplo: al mostrar los algoritmos de suma y resta con acciones manuales en los ábacos de la figura siguiente, se genera inmediatamente una compresión que difícilmente se alcanza con el mero manejo de números en la notación posicional estándar.

Figura 10: Abacos adaptados: nótese que son tres y poseen una pizarrita, todo lo cual facilita el cálculo y la asociación con los algoritmos simbólicos ejecutados con lápiz y papel.

Este fenómeno puede ser el que esté subyacente y nos permita explicarnos porqué un preescolar puede entender algoritmos de manejo algebraico cuando éstos se realizan moviendo con las manos cajas y dulces, y no cuando se realizan en forma abstracta. Es conocido, tal como lo muestra las estadísticas en Francia de la revista Science et Vie, que con procedimientos simbólicos la mayoría de los estudiantes sólo repiten las manipulaciones algebraicas sin entender lo que están haciendo. Pero, de alguna forma cuando se hacen con las manos entonces mágica y espontáneamente surge la comprensión de algoritmos y conceptos.

El lenguaje también es movimiento

La concatenación de actos elementales para formar acciones complejas y estrategias requiere resolver varios desafíos. Primero, es necesario coordinar el secuenciamiento. También es crítica la habilidad de efectuar interrupciones frente a nueva información que está llegando. Si no, no hay flexibilidad y la supervivencia es imposible. Por otra parte, es necesario buscar formas de evitar una gran variedad de posibles secuencias de actos elementales, pues no hay memoria suficiente para almacenar muchos miles de secuencias. La solución es reutilizar secuencias ya asimiladas. Aquí reside el origen de la sintaxis y la composicionalidad. También es clave la capacidad de asociar secuencias de actos a características perceptuales de eventos. Esto significa que problemas con diferentes características deben gatillar diferentes secuencias de actos. Otra facultad clave es la de asociar secuencias de actos a otras secuencias de diferente naturaleza motora. Por ejemplo, asociar secuencias de actos motores de la boca y laringe a secuencias de actos motores con la visión y las manos. Es decir, marcar con ruidos secuencias de acciones con las manos y vista, y poder referirse luego a esas marcas, y componer nuevas marcas con esas marcas. Así llegamos al lenguaje. Antes de pasar a la matemática, revisemos estos desafíos en más detalle.

Al considerar las diferentes partes del cuerpo y la posibilidad de mover cada una de ellas, surge una verdadera explosión combinatorial de secuencias posibles de acciones motoras. Pero como destaca Rodolfo Llinás esa explosión no ocurre en la práctica, pues los organismos ya tienen empaquetados secuencias predeterminadas que evitan la verdadera paralización que se produciría si el organismo debiera decidir cada vez cómo componer una secuencia para lograr cierto objetivo. Por ejemplo, ponga su mano derecha en su cadera derecha y ahora observe su brazo mientras lleva su mano derecha hasta agarrar su oreja izquierda. Repita y observe los complejos movimientos del codo y de la muñeca. Durante el movimiento una serie de músculos ejecutaron acciones sin que usted tuviera que decidir moverlos. Si el organismo tuviera que decidir qué componentes utilizar y cómo mezclarlos y seriarlos unos tras otros para fabricar toda la secuencia, entonces la solución sería muy lenta. Nadie podría sobrevivir con esos tiempos de respuesta.

Sin embargo, en algunas secuencias de actos, particularmente los hechos con la mano, dedos, boca y lengua, esa restricción a la explosión combinatorial puede desactivarse. Con tiempo y dedicación uno puede conscientemente inventar y componer secuencias muy complejas y completamente nuevas. Y así una verdadera infinidad de combinaciones es posible. Pero el costo es alto: se requiere mucho más tiempo para seleccionar estrategias y muchos más recursos atencionales. Por ejemplo, si usted quiere seleccionar una pieza para colocarla en un rompecabeza que sólo está armado a medias, entonces debe simular mentalmente y ensayar con las manos varias secuencias de movimientos de traslación y rotación antes de lograr encajar correctamente la pieza. Largas y complejas secuencias de acciones manuales y faciales fabricadas conscientemente sólo son posibles para actividades que no requieran una respuesta muy rápida. Por ejemplo, para ejecutar complejas operaciones para manipular herramientas o para largas cadenas de acciones que correspondan a preparativos para futuras actividades. Pero esta concatenación consciente de acciones recluta también algunas áreas neuronales diferentes a las reclutadas para secuencias preempaquetadas. Así por ejemplo, el neurocientista Ira Black, cita el caso de un paciente con un grado avanzado del mal de Parkinson que es incapaz de caminar y que está confinado de por vida a una silla de ruedas. Sin embargo, en una situación de extrema emergencia, donde sonó la alarma de incendio, en medio del pánico se levantó y arrancó corriendo. Una vez en el patio y fuera de peligro cayó inmovilizado. Es decir, los circuitos utilizados para conformar y ejecutar secuencias de actos en forma consciente y deliberada tiene algunas componentes distintas a las de los circuitos que ejecutan secuencias preempaquetadas, ligadas a respuestas emocionales u otras inconscientes.

Pero entonces, ¿cómo maneja el cerebro la enorme explosión combinatorial de secuencias posibles de concatenación de actos? La solución es reutilizar secuencias ya asimiladas, mediante recursividad y composicionalidad. En efecto, en las acciones manuales de varios primates no humanos y en las secuencias de acciones de bebés, se observan elementos de sintaxis en la composición y generación de acciones. Según la Psicóloga Patricia Greenfield niños muy pequeños ya muestran maneras de colocar objetos unos dentro de otros y de componer acciones manuales que satisfacen una sintaxis elemental. Esa sintaxis motora primaria está dada por la naturaleza de las acciones espaciales y manuales, y constituiría la base de la sintaxis de acciones más abstractas que luego se efectúan en el lenguaje. Aún más, según el neurocientista del lenguaje, Philip Lieberman, estudios en roedores muestran que ellos ya usan una sintaxis básica para concatenar movimientos individuales en programas bien formados de acicalamiento mutuo, y esta sintaxis está regulada por los ganglios basales, un área subcortical y primitiva del cerebro y que forma parte del denominado cerebro reptil. Asimismo, en primates la sintaxis más compleja presente en las acciones espaciales y manuales, también está regulada por los ganglios basales, y en humanos esa misma área subcortical participa en la regulación de la sintaxis del lenguaje. Esta sintaxis ahora coordina las secuencias de marcas auditivas y motoras de la boca que representan palabras y frases. Es decir, la composición de marcas hereda y aprovecha la sintaxis proveniente originalmente de acciones espaciales y manuales.

Aún cuando se tengan muchas y poderosas secuencias de actos, es necesario la selección de secuencias de acuerdo a la situación que en ese momento enfrenta el sujeto. Es decir, por una parte una secuencia de actos pasa a ser una unidad, un elemento completo. Por lo tanto se la puede llamar como a un todo y activarla. Por otra parte, la información de la secuencia reside en una o varias memorias que mantienen asociaciones con aquello que la puede activar. Así diferentes características perceptuales de un problema activa una o más secuencias, que luego de un proceso de competición, se seleccionan algunas y se ejecutan. Por ejemplo, un ladrido fuerte y sorpresivo activa una o varias secuencias de actos de defensa: levantar las manos, apurar el corazón, tensionar los músculos de las piernas, gritar, etc.

Además de la gran importancia del secuenciamiento de actos, de la composicionalidad y de la selección, es también crítica la capacidad de efectuar interrupciones. De acuerdo con Philip Lieberman, los ganglios basales son el área neuronal que contiene la capacidad clave de interrumpir actividad en ejecución. Ellos son los que no sólo están a cargo de aprender nuevos patrones de actividad motora, de secuenciar los actos individuales y de la sintaxis, sino que también de interrumpir secuencias en ejecución de manera de incorporar nuevas decisiones sobre la base de información procesada paralelamente o recientemente ingresada. Según Lieberman, las presiones selectivas que dieron origen a la facultad de caminar en dos pies y a la capacidad de realizar complejas secuencias motoras con las manos y dedos, ambas reguladas por los ganglios basales, son también las que dieron origen a la capacidad de los ganglios basales para regular las aún más complejas y variadas secuencias de actos motores de la laringe, cuerdas vocales y lengua que generan el habla. Así por ejemplo, en pacientes con mal de Parkinson, con daños a los ganglios basales, y problemas de locomoción y control manual, también presentan deficiencias de inflexibilidad en la toma de decisiones y de comprensión oral. Algo similar ocurre con montañistas, en los que a gran alta altura, sufren un daño transiente a los ganglios basales que les dificulta la comprensión de frases y la capacidad de interrumpir decisiones. La inflexibilidad cognitiva producida llega a tal punto que es considerada una de las principales causas de muerte en el escalamiento del Everest.

Con movimientos de mano, cara y cuerpo no siempre es fácil comunicar cualquier concepto. Según Stevan Harnard, con las manos no se puede señalar algo o imitar a alguien en la noche en total obscuridad. También es muy difícil describir con las manos objetos ausentes. Más difícil aún es nombrar propiedades o conceptos abstractos sólo con mímica usando las manos y la cara. Es prácticamente imposible diseñar una pantomima para indicar clases de objetos y no sólo instancias específicas de esas clases. Para realizar todo eso es necesario poder marcar categorías abstractas, darle un nombre o marca. Según Harnard el origen del lenguaje comienza con el acto de marcar categorías con ciertos signos arbitrarios y el encadenamiento de esas marcas para describir proposiciones. Es decir, si bien con acciones motoras manuales y de otras partes del cuerpo podemos encadenar secuencias de acciones y generar nuevas secuencias mezclando preexistentes, el hecho de nombrar una secuencia con una marca, sea ésta un dibujo o ruido, y luego referirse a ella por su nombre, es un mecanismo muy poderoso. Al parecer este es un fenómeno únicamente humano, aunque algo de esto se puede enseñar a chimpancés. En condiciones de laboratorio se les puede enseñar un vocabulario icónico básico de varias decenas de íconos (150 según Lieberman), y donde posteriormente y en forma autónoma logran componer frases cortas y crear algunas nuevas palabras. También, según el neurocientista de la matemática Stanislas Dehaene, se les puede enseñar a manejar y entender los numerales del 1 al 9 y a realizar sumas con ellos: una vez que han aprendido a sumar con objetos concretos y han aprendido a reconocer los numerales y a asociarlos con cantidades de objetos, entonces a la primera vez pueden hacer las sumas con símbolos.

Pero, ¿qué significa marcar? ¿Y porqué esta facultad es tan poderosa? Marcar es asociar a una secuencia de actos motores otra secuencia de actos motores, pero de diferente naturaleza. Una secuencia de movimientos manuales y visuales, se asocian a una secuencia de actos vocales, que emiten ruidos y se pueden escuchar. En el que los escucha, gracias a un sistema neuronal espejo, se le activan los mismos actos motores pero sólo en forma virtual; sin necesariamente emitir los ruidos. Pero la gracia es que en este nuevo sujeto, la secuencia virtual de actos verbales las asocia a su vez a actos motores manuales y visuales virtuales. ¡Y, así, el que escucha logra comprender qué le dice el otro! Ver figura 11.

La otra gracia de la secuencia vocal (ejecutada con la ayuda de la laringe, lengua y cuerdas vocales) es que es de mucha más corta duración y requiere utilizar mucho menos energía y recursos. Por lo tanto, requiere menos capacidad de memoria y es mucho más fácil de ejecutar. Imagínese un niño de un año que está enojado. Muchos de ellos además de llorar realizan diferentes acciones como por ejemplo patalear e incluso ponerse cabeza abajo. Así llaman la atención y comunican su enojo. Después de aprender a hablar, al mismo niño le basta decir "estoy enojado" para comunicar la misma idea. Gracias a la capacidad de marcar acciones y usar luego sólo esas marcas, es posible no sólo una variedad aún mayor de acciones y mayor flexibilidad, sino que también reducir los tiempos de respuesta. Se requiere mucho menos tiempo para decir lo que hay que hacer que para hacerlo, especialmente con largas secuencias de acciones. Con el manejo y composición de marcas se alcanza un nivel completamente diferente de sosfisticación en la composición de acciones. Pero aún así, sin sintaxis las secuencias se vuelven inmanejables. El biólogo matemático Martin Nowak y sus colaboradores han mostrado que dado que no muchas marcas de acciones pueden ser finalmente almacenadas en memoria de largo plazo, entonces la sintaxis composicional es una adaptación esencial. Según Lieberman, cuando un niño pasa de las 250 palabras empieza a emerger la gramática. Por otra parte, con la ayuda de la escuela un adulto normal llega a dominar cerca de 60 mil palabras diferentes. Según el psicólogo Geoffrey Muller, no más de 100 se usan el 60% de las veces, y no más de 4000 se usan el 98% de las veces, y, con menos de 1000 se podría decir todo. La composicionalidad hace posible que con unos pocos miles de marcas se puedan comunicar miles de millones de ideas.

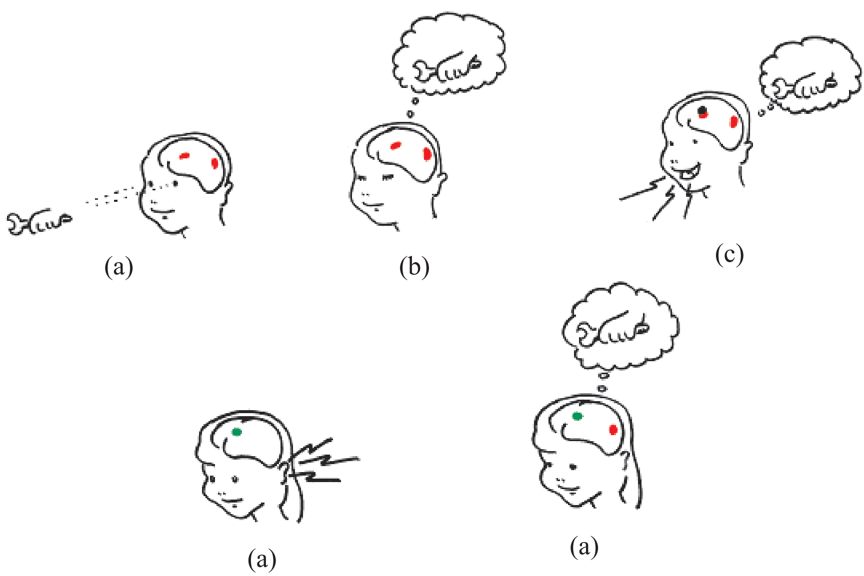

Figura 11 (a) Sujeto 1 ejecuta o ve ejecutar una secuencia de actos motores manuales

(b) Sujeto 1 se imagina ejecutando la secuencia de actos motores manuales

(c) Sujeto 1 asocia secuencia motora con boca, lengua y laringe a secuencia motora manual imaginada, produciendo secuencia de ruidos.

(d) Sujeto 2 escucha la secuencia de ruidos producidos por Sujeto 1, generando en Sujeto 2 una secuencia de activaciones en neuronas espejo motoras bucales

(e) Sujeto 2 asocia a secuencia espejo motor bucal la correspondiente secuencia motora manual, comprendiendo lo que Sujeto 1 imaginó.

Monstruos simbólicos

Hasta aquí, de todo lo que hemos revisado, pareciera que lo que aprendemos son acciones y conceptos motores y perceptuales, y marcas que denotan algunas de esas acciones. Todo esto es muy natural y parece fácil para el cerebro. Entonces, si la matemática está basada en ese tipo de acciones no debería costarnos tanto. Debería ser relativamente fácil, tal como lo es aprender a contar hasta tres, aprender a caminar, aprender a partir nueces con una piedra, o aprender a hablar. No deberíamos necesitar profesores ni ir a la escuela. Entonces, ¿dónde reside la dificultad que se observa en el aprendizaje y uso de los conceptos típicos de la matemática de la escuela? Para responder a esta pregunta pasemos a un fenómeno completamente diferente: la escritura.

Una vez que la facultad de marcar o nombrar se efectúa con marcas externas no biológicas, tales como rayas en huesos o marcas en sobres de arcilla (que sería según Denise Schmandt-Besserat el origen del conteo abstracto y la escritura), se genera un fenómeno completamente nuevo y enormemente más poderoso. Por una parte, el mismo sujeto puede almacenar cadenas mucho más largas de acciones y marcas, que día a día puede revisar y volver a reutilizar y mezclar, generando así más cadenas y cada una de mayor longitud. Por otra parte, otros sujetos pueden obtener las cadenas generadas y a su vez revisarlas, mezclarlas, y recombinarlas no sólo utilizando las recibidas sino que agregando las suyas y de terceros. Es decir se genera una enorme maquinaria de generación de secuencias de marcas.

El número y grado de sofisticación de secuencias construidas colectivamente, logra generar estrategias y conceptos de un grado de sofisticación y abstracción mucho más allá de lo que el cerebro promedio por sí sólo aguanta y entiende. El cerebro no está evolucionariamente adaptado para comprender estas super complejas, indirectas y recursivas secuencias de marcas, y entonces fácilmente pierde el significado de lo que está haciendo. Y aún cuando muchos conceptos y secuencias de marcas se redefinen generado otros conceptos y secuencias aparentemente más cortas, se generan objetos abstractos de significación muy indirecta. Uno de los primeros en estudiar este fenómeno fue el filósofo Marshall McLuhan, quien mostró el enorme impacto de la escritura en la poesía y la narrativa, que “desde aquel mundo mágico y resonante de relaciones simultáneas que es el espacio oral y acústico” llevaría al hombre a una mayor libertad e independencia pero también a grandes traumas y angustias, llegando incluso a la esquizofrenia.

Pero en la medida que el cerebro pierde comprensión de lo que realmente significan las secuencias de marcas que crecientemente maneja, automáticamente se activan rápidamente otros procesos que aumentan todavía más la posibilidad de pérdida de significación. Paralelamente se activan algoritmos cerebrales que buscan y encuentran patrones (la mayoría superficiales y fortuitos) que cohabitan en esas largas secuencias. Esto genera un proceso en el cual el cerebro empieza a utilizar y mezclar esos patrones sin necesariamente verificar su significación ni el hecho que sean válidos o correctos. Al poco tiempo de usarlos, los asimila superficialmente y así los repite. Estos procesos paralelos de detección y asimilación de patrones se activan con mayor frecuencia en la medida que al cerebro se lo esté estimulando y forzando a enfrentar ese tipo de situaciones y cadenas de acciones. Finalmente, luego de terminada la vida escolar y al no enfrentarse más a problemas académicos, el cerebro rápidamente los olvida. Después de un tiempo sólo

Figura 12 (a) Un primer sujeto tiene una idea y activa áreas visuales y motoras

(b) Asocia una secuencia de actos motores manuales para producir marcas externas en documento
(c) Otro sujeto lee las marcas del documento y se le activan áreas visuales
(d) Se activan áreas motoras y neuronas espejo que generan una experiencia similar a la del sujeto anterior
(e) En otro momento activa las mismas áreas y recombina secuencias creando una nueva idea
(f) En otro momento activa nuevamente las áreas visuales y motoras, y asocia las áreas motoras para agregar nuevas marcas externas al documento.
(g) Luego de que varios sujetos agregan y perfeccionan las marcas en el documento se empieza a producir uno mucho más sofisticado.

quedan en memoria algunos fragmentos parciales y la sensación de completa inutilidad. En las palabras del matemático ruso A. D. Alexandrov: “Estas abstracciones, apoyadas unas a otras, han alcanzado tal grado de generalización que pierden aparentemente toda conexión con la vida diaria y el hombre medio no entiende nada de ellas salvo el simple hecho de que todo es incomprensible”.

La escritura y el lenguaje matemático escrito son una poderosa maquinaria de generación de conocimientos. Nos permiten refinar procedimientos, combinarlos y generar nuevos conocimientos utilizando los anteriores, nombrarlos y asociarlos con otros. Todo esto lo hace de una manera mucho más potente que si lo hiciera una sola persona y sólo utilizando su propia memoria biológica (que es muy variable y poco confiable). Si además ahora agregamos el computador, entonces la generación de nuevas secuencias se dispara a otros niveles de sofisticación, creando más y potentes monstruos, cada vez más alejados y ajenos a los procedimientos y estrategias naturales al cerebro.

¿Qué podemos hacer entonces para asimilar más fácilmente esos monstruos que en la ciencia las comunidades de científicos han estado constantemente por siglos construyendo? Una estrategia es ocupar más tiempo intentando entender para qué se construyen, cuál es la motivación, cuáles son las componentes sensoriales motores que podrían estar subyacentes a esos conceptos, los eventuales movimientos de objetos concretos que podrían estar involucrados, repetir las acciones manuales y corporales primitivas que dieron lugar a esas abstracciones, y establecer múltiples conexiones con diversas representaciones antes de pasar al vocabulario más abstracto.

Tomemos el ejemplo de enseñar a leer. El aprendizaje del sistema fonético, donde los símbolos por sí solos no significan nada, requiere un montón de práctica durante varios meses antes de poder comenzar a establecer las primeras ligazones y poder leer las primeras palabras. Sin embargo, si el sujeto no practica, rápidamente olvida lo aprendido. Esto sucedía con mayor frecuencia cincuenta o cien años atrás, dado que en la sociedad agrícola de esa época no existían letreros ni nada que el campesino tuviera que obligatoriamente leer. No existía la necesidad de estar constantemente practicando la lectura ni la escritura. Muchos usaban lo aprendido sólo para firmar su contrato de matrimonio. Para lograr darle un significado a los dibujos simbólicos que representan las letras y aprender a leer, una actividad posible es enseñar primero a deletrear, es decir, a segmentar a viva voz palabras simples. Este ejercicio no es totalmente ajeno a la mente y puede constituirse en un juego entretenido para el preescolar (sobre todo si se realiza en forma de canciones). Una vez dominado el juego de segmentación, puede seguirse con la lectura letra por letra de palabras simples y haciendo énfasis en escucharse a uno mismo con el objeto de lograr una verdadera compresión y dibujar, por ejemplo, una línea que asocie la palabra con el dibujo del objeto aludido. Esta es una estrategia que al menos en castellano resulta factible y que ilustra cómo aprovechar acciones más naturales al cerebro para que lenta y cuidadosamente el estudiante se enfrente y asimile conceptos y secuencias más abstractas.

Con los números la situación es parecida. Para un niño preescolar aprender a contar más allá 3 o 4 no es algo innato y requiere memorizar una larga lista de nombres. Es como si usted tuviera que memorizar una lista de 100 nombres en chino o en zulú. El cerebro está diseñado por selección natural para contar hasta 4 y memorizar zonas geográficas, lugares de cacería, animales y algunos nombres de personas. Pero una lista de 100 o más nombres abstractos, que son difíciles de asociarlos a algo concreto, no es algo muy natural. Sólo después de mucha repetición, lentamente el estudiante comienza a descubrir cierto grado de composicionalidad, lo cual facilita la memorización. Con los números y luego con el sistema posicional, sólo la constante práctica en el intercambio social de bienes previene su abandono. Aparentemente la constancia de uso y repetición de otras áreas de las matemáticas básicas no es suficientemente alta, y así sería como lo poco de porcentajes y fracciones que se aprende, se termina olvidando a los pocos meses o años de dejar la escuela.

Estos hallazgos tienen importantes implicaciones didácticas. El esfuerzo de diseño pedagógico debería priorizar la búsqueda de estrategias para reinterpretar las secuencias de procedimientos y acciones en un formato natural a la mente. Reescribir las ideas en formas ecológicamente válidas, y explorar estrategias de pasar desde esas formas a las más abstractas y potentes. En otras palabras, la estrategia didáctica es buscar caminos accesibles desde los cuales sea siempre fácil ver las conexiones originales con lo concreto.

Reinterpretación de los siete problemas

Con estos nuevos antecedentes podemos ahora reexaminar los siete problemas propuestos. Ya hemos revisado el origen de la ilusión que se produce en el problema geométrico de las dos mesas. El fenómeno se debe a que el sistema visual es enfrentado a una situación límite, que no se da en las condiciones típicas y recurrentes para lo cual los algoritmos visuales fueron diseñados por selección natural. Por esa razón no funcionan bien y nos engañan. Los algoritmos visuales procesan imágenes bidimensionales producidas en la retina y generan interpretaciones tridimensionales usando una serie de pistas claves. Dado que hay muchas posibilidades de objetos en tres dimensiones que producen una misma imagen bidimensional, el problema es complicado, con múltiples soluciones, y los algoritmos visuales deben escoger una de las soluciones posibles. Para efectuar la selección más apropiada, los algoritmos visuales se basan en varias pistas. Pero estas pistas no son cien por ciento infalibles. Ellas sirven en las condiciones típicas de la vida cazadora recolectora. Por ejemplo, el sistema visual asume que siempre la luz llega desde arriba, y es así que en la figura siguiente todos los objetos se interpretan como huecos salvo el objeto del medio de arriba que se interpreta como una pelota.

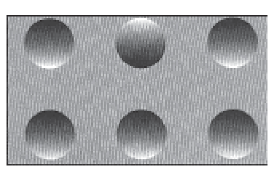

Figura 13: Pelotas versus huecos.

Sin embargo, si usted da vuelta la página pies para arriba ahora todos los objetos pasan a ser pelotas salvo la excepción que ahora parece un hueco. Es decir, la pista "la luz llega desde arriba" una vez interpreta una imagen bidimensional como pelota y otra vez como hueco, pues al dar vuelta la página lo que se considera arriba cambia y es lo que antes era abajo. Esta pista es una buena pista en situaciones típicas que nuestros antecesores cazadores recolectores encontraron por miles de generaciones. Pero esta pista falla en casos extremos, produciendo ilusiones. Este efecto es muy utilizado en iluminación, donde al colocar luces que alumbran desde abajo hacia arriba, se logra dar la sensación de estar en un mundo artificial e irreal.

El efecto de las mesas, diseñado por el psicólogo Roger Shepard, muestra cómo esos algoritmos interpretan la perspectiva. Si uno tapa las patas y bordes de las mesas, mágicamente las superficies parecen mucho más similares. Es decir, la pista de las patas y bordes nos hace reconstruir mesas colocadas en cierta perspectiva en tres dimensiones. Además el borde más grueso afecta a toda la mesa haciendo ver la superficie todavía más ancha. Roger Shepard ha demostrado, en una serie de experimentos de comparación de figuras, que el cerebro las rota mentalmente, con tiempos proporcionales al ángulo de rotación. Sin embargo, esa secuencia de actos mentales compite con la que genera la perspectiva, y no logra ganar en el caso que las mesas estén con patas y bordes.

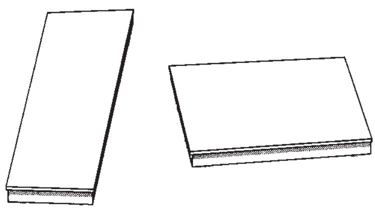

Figura 14a:
Las mismas dos mesas
pero sin patas

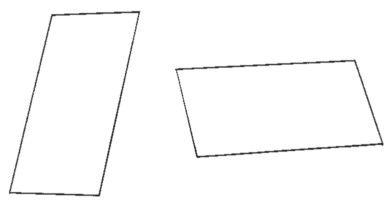

Figura 14b:
Las mismas dos mesas
pero sin patas ni bordes

En definitiva, el cerebro no puede dejar de activar inconscientemente algoritmos que utilizan esas pistas y a pesar de que después de medir nos convencemos que las superficies son iguales, aún así no podemos hacer que el cerebro inhiba esos algoritmos, y entonces, y muy a pesar nuestro, esos algoritmos paralelamente estarán compitiendo con la interpretación lógica.

Veamos ahora el segundo problema. Este problema resulta de nuestra dificultad de manejar conectivos lógicos, en particular de la implicación (el *Si ... entonces ...*). Según el psicólogo Philip Johnson-Laird, especialista en la psicología del razonamiento lógico y autor de esta interesante "ilusión lógica", nuestros algoritmos cerebrales son muy distintos al algoritmo que la visión tradicional de la matemática implícitamente postula. El cerebro no usaría la definición exacta de los conectivos, ni aplicaría un algoritmo basado en una tabla de verdad. Más bien los algoritmos de razonamiento se basan en crear modelos concretos. Es decir, las cadenas de marcas que conforman las proposiciones activan más intensamente imágenes de modelos concretos y secuencias de actos a operar sobre ellos, que secuencias de actos que lleven a acceder a tablas de verdad y a su utilización para resolver el problema. Con este tipo de algoritmos Johnson-Laird obtiene patrones de errores y de tiempos de respuesta similares a los medidos en pruebas de laboratorio. En nuestro problema, la proposición

Si tengo una mano cerrada entonces tengo una moneda

sería manejada en memoria activando el modelo o caso siguiente

Mano cerrada   tengo moneda

Por otra parte, la proposición

Si tengo una mano abierta entonces tengo una moneda

sería manejada con el siguiente modelo o situación concreta

Mano abierta   tengo moneda

Por lo tanto, si sólo una de las dos proposiciones es verdadera, entonces sólo uno de los dos modelos es verdadero, pero como en ambos está el hecho *tengo moneda*, entonces concluimos automáticamente que se tiene una moneda. El que una proposición sea cierta y la otra no se debería a la componente mano abierta / mano cerrada. Es decir, de alguna forma el conectivo "implicación" el cerebro lo trata como el conectivo "y".

Sin embargo, modelos más de acuerdo con la definición de la implicación serían para la primera proposición uno dado por las tres situaciones siguientes:

Mano cerrada   tengo moneda
Mano abierta   tengo moneda
Mano abierta   no tengo moneda

Y para la segunda proposición, estas otras tres situaciones

Mano abierta   tengo moneda
Mano cerrada   tengo moneda
Mano cerrada   no tengo moneda

Usando estos dos pares de tres situaciones, si sólo uno de los pares es verdadero y el otro no, entonces como

Mano cerrada   tengo moneda
Mano abierta   tengo moneda

están repetidos en ambos pares, entonces no pueden ser ciertos, y los únicos pares que pueden ser verdaderos son los no repetidos:

Mano abierta   no tengo moneda
Mano cerrada   no tengo moneda

Pero en ambos casos *no tengo moneda* está presente, luego esa sería la conclusión correcta. La pregunta entonces es, ¿si en realidad el algoritmo que inconscientemente usamos fabrica modelos concretos y sobre ellos procesa la información, entonces porqué genera modelos incompletos para la implicación? ¿Porqué sólo activa en memoria sólo un caso y no los tres que corresponden? Según Johnson-Laird, el grado de dificultad y los errores lógicos que cometemos en deducciones lógicas con una proposición tienen que ver con el número de modelos que se requiere para traducir esa proposición. En el caso examinado, el conectivo "implicación" requiere tres modelos, pero tendemos a usar sólo uno. Esto explicaría además hechos experimentales como que el conectivo lógico "y" es mucho más fácil que el conectivo "o" y que la "implicación".

Veamos ahora la secuencia de tres problemas equivalentes de probabilidades. La sicóloga evolucionaria Leda Cosmides y el antropólogo John Tooby, que han estudiado diferentes mecanismos de razonamiento y su origen evolucionario, atribuyen la dificultad a lo que denominan "individuación". Los animales y humanos estaríamos hechos para contar objetos completos, pero no aspectos inseparables de objetos. Somos pésimos para segmentar el mundo en forma no natural. Así, la capacidad de contar no sería una capacidad general, sino que es específica. La arquitectura cognitiva de una especie puede no tener la maquinaria para contar algunas cosas, pero sí para contar otras, o para contar bajo unas condiciones pero no en otras. Hay animales que pueden contar ciertas frutas, pero no árboles u otros animales, otros que pueden contar ciertos objetos en ciertas horas de la mañana, pero no en otra hora del día o en la noche. Es decir, el conteo es un mecanismo que depende del contenido específico y la situación específica. Es más fácil contar dulces o bloques (son objetos completos) que lados de una carta. Uno tiende a contar la carta completa, y de ahí la confusión. Según Brasse, Cosmides y Tooby, "El acto clave de intuición para resolver estos problemas es aprehender qué aspectos del mundo necesitan ser individuados y contados".

En conclusión, nuestra habilidad de contar no es un algoritmo general. Depende críticamente de la naturaleza específica de lo que se cuenta y del contexto. Sólo somos buenos para contar objetos completos, que se mueven como una unidad, independiente de otras superficies. En otros objetos o en otras condiciones, otras características más salientes o naturales son seleccionadas y "contadas". Esta capacidad de individualizar objetos físicos concretos es parte de un módulo cerebral denominado Teoría de Cuerpos, y que se observa ya en la física innata que poseen los recién nacidos. Si bien es cierto que ya al nacer podemos distinguir espontáneamente no sólo entre uno, dos o tres objetos, sino que también entre uno, dos o tres sonidos o acciones, el verdadero conteo que inicialmente es un mapeo secuenciado entre objetos y dedos, comienza recién a los dos años de edad y se completa cerca de los seis. Para los niños, ese conteo es mucho más fácil hacerlo con objetos físicos que pueden agarrar y mover con sus manos, que con sonidos, acciones u objetos más abstractos. Es decir, nuestros algoritmos de individuación y conteo, que tienen un origen perceptual, motor y manual, no sólo tienen grandes implicaciones para el aprendizaje de la aritmética sino que también de matemáticas más avanzadas tal como las probabilidades.

Veamos ahora porqué es fácil entender el concepto de raíz cuadrada cuando se realiza con dulces. Primero, imitar acciones y secuencias de actos manuales es muy natural. Hemos visto que todo el sistema de neuronas espejo nos ayuda justamente a hacer automáticamente ese tipo de tareas. Y no sólo nos ayuda a repetir las secuencias de acciones sino que también a entender su significado, a entender la intención que hay detrás de la secuencia de movimientos. De esta forma, posteriormente el estudiante puede generalizar y hacer el mismo tipo de acciones con otros números. Luego puede comenzar a simular mentalmente esas secuencias, llegando a hacer todo sin las manos y a conectar las secuencias mentales con secuencias de marcas y operaciones en papel, y así llegar a dominar el concepto de raíz cuadrada.

Lo mismo sucede con el problema de la ecuación. La noción de incógnita o variable es resbaladiza para mucha gente. Pero mágicamente, si mostramos ese concepto en forma concreta, tal como con cajas, desaparecen muchas dificultades conceptuales y operacionales. El cerebro está preparado para manipular objetos, y por lo tanto, le es trivial realizar secuencias de acciones manuales con cajas y dulces. El desafío es entonces cómo pasar al mundo abstracto del álgebra. Mi experiencia es que con un plan cuidadoso de transferencia y donde se lleve por un período intermedio tanto la representación concreta con manejo manual y la representación abstracta con manejo simbólico, y se haga ver la correspondencia entre una y otra, entonces se puede lograr que muchos más estudiantes comprendan el álgebra. Comienzan simulando mentalmente las operaciones manuales, y luego escribiendo las operaciones simbólicas correspondientes, a la manera de marcas ayuda memoria de las acciones manuales. Este proceso llega a un punto en que el estudiante se familiariza con la notación y reglas simbólicas, pero siempre manteniendo activa su significación manual. Esta comprensión se traduce que al final niños más pequeños pueden llegar a resolver mentalmente problemas de ecuaciones planteados en forma simbólica. Un observador externo que no conozca la estrategia de enseñanza utilizada, no distinguiría a primera vista el mecanismo de solución del que usa un estudiante que recibió una educación tradicional. La diferencia, sin embargo es enorme: a mucho menor edad los estudiantes logran un buen dominio del álgebra escolar, aumenta el porcentaje que responde correctamente, crece la capacidad de resolver problemas mentalmente, disminuyen los tiempos de respuesta y los estudiantes manifiestan un mayor entendimiento. Más detalles para la enseñanza de ecuaciones lineales así como de segundo grado pueden encontrarse en el libro “Inteligencia Matemática”.

Revisemos ahora el problema seis. La noción de sistema dinámico acarrea una gran paradoja. Por una parte, se enseña con el lenguaje típico de ecuaciones diferenciales en cursos de universitarios de matemáticas y física sólo para estudiantes de ingeniería o matemáticas o física, y normalmente es considerada una materia difícil. Incluso hay temas muy importantes y claves para la aplicación efectiva de los sistemas dinámicos en el modelamiento de procesos físicos y tecnológicos como las nociones de estado y observabilidad que aún en esos cursos no se enseñan. En otras áreas de la ciencia, tal como en psicología, el desconocimiento de estos conceptos ha marcado parte importante de la lucha entre diferentes escuelas. Por ejemplo, entre el conductismo y la psicología cognitiva. Aparentemente, ésta sería una materia muy compleja y difícil de asimilar. Por otra parte, la idea de un sistema que cambia su comportamiento en el tiempo y que ese cambio se debe a ciertas reglas, es muy común y fácil de entender. Mucha gente lo usa para explicar cambios en la economía, en el comportamiento del cuerpo frente a enfermedades y remedios, etc. Incluso la noción de estado es natural. Por ejemplo, psicólogos, neurocientistas y gente común y corriente conciben fácilmente que no todo es respuesta frente a estímulos, sino que casi siempre es más importante la actividad autónoma del cerebro, todo el conjunto de procesos internos que siempre están ocurriendo. En definitiva, la noción de sistema dinámico y de estado parece no ser ajena a nuestra manera natural de procesar la información del mundo. ¿Cómo se explica entonces esta aparente paradoja?

Nuevamente, el problema reside en la falta de compresión del lenguaje matemático. El enorme poder de la escritura matemática, significa una capacidad de síntesis extraordinaria para describir reglas que generan comportamientos bien precisos. Pero, el formato simbólico en que se escriben esas reglas no es natural al cerebro. Sin embargo, si se comienza con material concreto y una estrategia cuidadosa para ir progresivamente reescribiendo las reglas en el leguaje matemático, se puede entonces lograr un grado de compresión mucho mayor. El material concreto ideal para este tipo de problemas son los juegos de tablero tal como el ajedrez.

Según John Holland, padre de los algoritmos genéticos, los juegos de tablero son uno de los pilares básicos de la matemática, tanto o más que los números. Están normalmente descritos en un formato espacial y con reglas simples. Las reglas típicamente describen movimientos de piezas sobre la base de información espacial local y están especificadas para que esos movimientos sean ejecutados con las manos, agarrando y trasladando piezas. Es decir, componentes perceptuales motores y secuencias de acciones manuales constituyen el formato básico de estos juegos. Este formato es natural al cerebro, y así es como juegos como las damas y el ajedrez rápidamente son comprendidos por todo el mundo. Basta con mirar jugar a otros. En mi experiencia, con estos juegos es posible explicar hasta la noción de estado a preescolares. Por ejemplo, si el mundo bidimiensional contiene una pelota en vez de una bacteria y en lugar de comida los números significan alturas de colinas, entonces el movimiento al casillero siguiente también involucra el "vuelo" (la velocidad) que lleva. Es decir, con sólo especificar la posición actual no basta para saber la posición en el instante siguiente. Este punto es crítico, y es lo que separa la física aristotélica (en la que sin fuerza no hay movimiento) de la de Galileo, que incluye la inercia. Ahora el estado es la posición y la velocidad. Con ellos dos basta para tener la posición y velocidad en el instante siguiente.

La figura siguiente muestra una actividad de modelamiento que involucra un sistema dinámico estocástico, jugado y diseñado por preescolares.

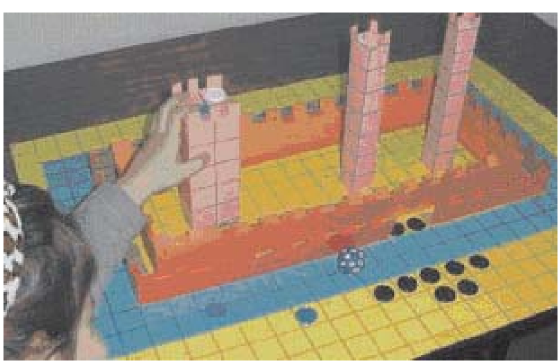

Figura 15: Juego tipo tablero

La imagen corresponde a un juego de tablero, parecido al ludo, en el que hay un castillo rodeado por un pozo y en el cual hay tres torres tras varias murallas protectoras. Cada jugador tiene tres guerreros que corresponden a tres fichas que comienzan desde un punto de partida en una esquina. Al lanzar el dado, el jugador obtiene la cantidad total de lugares a avanzar entre sus tres guerreros. En la cima de cada torre hay una ficha blanca que corresponde a la princesa a rescatar, o a la bruja, o a un maleficio. No se sabe a quién corresponde la ficha hasta que un guerrero llega a esa posición y da vuelta la ficha. Gana el que primero rescata a la princesa y la saca del castillo. Es importante hacer notar que, tal como lo advierten los psicólogos evolucionarios Martin Daly y Margo Wilson, para un niño preescolar el hecho de estar alejado de su madre es una cuestión crítica para su supervivencia, por lo que un problema de este tipo le es muy significativo.

Este juego ha sido fabricado en cartulina a partir de uno dibujado primero en un pizarrón y en el cual se preacuerdan algunas reglas. Representa la culminación de varios juegos de creciente complejidad que los estudiantes han ido diseñando y jugando. Lo interesante es que no sólo los niños lo encuentran entretenido, sino que aprenden a respetar sus reglas y a elaborar estrategias. El hecho que una simple ficha pueda representar a una linda princesa no es ninguna dificultad para preescolares, así como tampoco lo es las componentes aleatorias del juego. Pero, por sobre todo, lo más interesante es el fenómeno de metacognición. Los estudiantes desarrollan la noción de ir progresivamente sofisticando el juego de manera que se parezca cada vez más a una situación real. Los preescolares comprenden que el juego es un "modelo" de la realidad, es decir, que es de "mentira", y que ellos mismos lo pueden ir modificando para hacerlo cada vez más real.

Finalmente, en el problema con cuantificadores lógicos sucede algo similar. Los cuantificadores son utilizados normalmente en el lenguaje común y corriente, y muy particularmente para establecer propiedades o describir situaciones que involucran clases de objetos concretos similares. La dificultad clásica en el uso de dos cuantificadores y en distinguir la importancia del orden en que se usen, parece desaparecer cuando se trata de describir objetos concretos. En este caso el modelo de Johnson-Laird sería el mismo dibujo propuesto, y sobre él al cerebro le es natural determinar la veracidad de cada una de las propiedades espaciales que representan las diferentes proposiciones. Según George Lackoff y Rafael Núñez, la capacidad de manejar esquemas con contenedores, y cosas y contenedores dentro de contenedores, está fundada en el sistema perceptual motor del cerebro, y es esta capacidad la que estaría en parte detrás de la lógica simbólica. Es interesante observar que preescolares no sólo pueden manejar cuantificadores sobre una lista finita de objetos si no que también lo pueden hacer sobre listas o conjuntos no finitos. Utilizando una sugerencia del filósofo Ludwig Wittgenstein en la que propone visualizar un alambre helicoidal infinito como una máquina para hacer resortes en espiral en lugar de un alambre helicoidal muy largo, el siguiente problema fue presentado a preescolares y resuelto satisfactoriamente:

> *La máquina azul echa 2 pelotas azules en cada caja, pero a veces falla y echa menos.*
> *La máquina blanca echa una pelota blanca en cada caja, pero a veces falla y echa menos.*

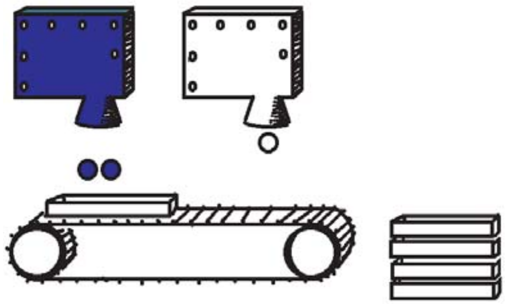

Figura 16: Máquinas fabricadoras de pelotas y correa transportadora.

Entonces, ¿es cierto o no?

Todas las cajas que han pasado por la correa quedan con menos de 4 pelotas _____

Si existen cajas con sólo 2 pelotas azules entonces la máquina blanca ha fallado ____

Hay cajas que quedan con lo mismo que otras ______

La revisión de estos siete problemas ilustra parte de la gran cantidad de algoritmos que nuestro cerebro utiliza al enfrentarse con problemas matemáticos. Esta es una gran diferencia respecto a lo que pasa con el lenguaje escrito, pues una vez que logramos establecer la asociación entre las secuencias motoras de laringe, lengua y boca con las respectivas marcas externas no biológicas, prácticamente está resuelto el problema de lectura. Sin duda que también se establecen otras conexiones, pero son sólo conexiones con secuencias naturales al cerebro, tales como situaciones de intercambio social, competencia entre grupos, cortejo, etc. Si además agregamos las asociaciones con secuencias de actos manuales para escribir esas marcas, entonces también resolvemos el problema de la escritura. Lograr estas asociaciones toman años, y, por supuesto hay diferentes grados de comprensión, pero en la medida que se siga practicando, las habilidades de lectura y escritura básica no se pierden jamás. Sin embargo, en el caso de las matemáticas la situación es muy diferente. No sólo es un lenguaje escrito donde es necesario establecer las asociaciones entre actos y secuencias motoras con marcas externas tal como las asociaciones con la escritura basada en el alfabeto fonético, si no que también es necesario utilizar una gran variedad de otros algoritmos que estaban diseñados para otras funciones. Es necesario también establecer una gran cantidad de diferentes asociaciones entre secuencias de actos motores y perceptuales de diferente naturaleza, y con asociaciones mucho más indirectas. Esta enorme variedad de algoritmos y asociaciones hace que el lenguaje matemático nos cueste mucho más, y que el estudiante fácilmente sienta que lo que hace es meramente un manejo sintáctico sin lograr comprender su verdadera significación.

Hasta aquí hemos visto la importancia de conocer algunos de los diferentes algoritmos cerebrales que consciente o inconscientemente utilizamos al enfrentar-nos con problemas matemáticos. Ellos nos dan una pista del porqué unos problemas nos son muy difíciles y otros muy fáciles. Sin embargo, hasta este momento hemos descrito esos algoritmos y la resolución de los problemas matemáticos de una manera todavía muy general y vaga. En lo que sigue examinamos una actividad específica y damos un detalle mucho mayor de los posibles algoritmos en juego.

Simuladores del aprendizaje y del descubrimiento

A continuación especificaremos un modelo que pretende emular una serie de procesos cognitivos que se producen al aprender una tarea específica en aritmética. El objetivo es ilustrar en detalle cómo las ideas anteriores nos ayudan a comprender los mecanismos del aprendizaje en una actividad bien definida y concreta de aprendizaje matemático. El desafío tiene dos partes: por una parte está la descripción de un modelo que especifique con la mayor precisión posible los supuestos mecanismos cognitivos utilizados así como la dinámica que los pone en juego para efectuar la tarea, y, por otra parte, está la comparación de las predicciones del modelo con mediciones experimentales en estudiantes reales.

Esta sección pondrá a prueba nuestras teorías de cómo el cerebro aprende y hace matemáticas. Sólo para citar un ejemplo que muestra la dificultad del desafío, imaginemos que queremos construir un modelo y simulador de cómo un niño compara dos números enteros y decide cuál es mayor. La visión tradicional es que una vez leído los dos enteros el estudiante selecciona y activa una regla como la siguiente: resta los números y si la diferencia es positiva entonces el primer número es mayor, si la diferencia es cero entonces ambos números son iguales, y si la diferencia es negativa entonces el segundo número es mayor. Sin embargo, al contrastar con datos experimentales surge una primera dificultad con los tiempos de respuesta y porcentajes de errores, pues se ha visto que el tiempo de respuesta aumenta significativamente en la medida que los números se parecen. Por ejemplo, Stanislas Dehaene midió los tiempos de respuesta de estudiantes brillantes de los dos mejores centros universitarios franceses, la Escuela Politécnica y la Escuela Normal Superior, y encontró, para números entre 1 y 9, tiempos de respuesta y porcentajes de errores significativamente superiores al comparar números cercanos que números lejanos. Este importante efecto no lo reproduce el modelo de la regla, pues esta regla predice los mismos tiempos de respuesta para cualquier par de números. Lo mismo sucede en otras tareas tal como sumar dos números. La evidencia experimental es que el tiempo de respuesta para hacer 1+1 es mucho menor que para hacer 4+5. Así, si sólo consideramos reproducir una simple suma con sus tiempos de respuestas, es ya un desafío no trivial. Si además agregamos otros comportamientos que pueden observarse en los estudiantes, tal como el movimiento de dedos a medida que van sumando, podemos entonces empezar a darnos cuenta de la verdadera dimensión del desafío de modelar y simular estas aparentemente simples actividades aritméticas. Pero encarar este desafío es muy importante, pues sólo con la comprensión en detalle de los mecanismos cognitivos podemos luego diseñar actividades que permitan ayudar a los estudiantes a mejorar la comprensión de las matemáticas.

Descripción de la tarea

La tarea que intentaremos entender y para la cual propondremos un modelo y un correspondiente simulador fue diseñada, ejecutada experimentalmente y luego analizada por el profesor Robert Siegler de la Universidad Carnegie Mellon y Elsbeth Stern, investigadora del Instituto Max Planck. La tarea es resolver problemas del siguiente tipo: “22+9-9" o ”22+12-8". Es decir, son siempre tres números en los cuales los dos primeros se suman y el tercero se resta, y donde siempre el segundo número es mayor o igual que el tercero. A dieciocho niñas y trece niños de segundo grado de un centro escolar de Munich, Alemania, con edades en promedio de poco menos de nueve años, se les presentaron varios problemas del tipo anterior durante ocho sesiones repartidas a través de cuatro semanas. Ocho de estos estudiantes utilizaron la estrategia más avanzada en al menos un ensayo de pretesteo, por lo cual no participaron en el estudio. En cada una de las siete primeras sesiones se presentó 20 problemas a cada estudiante, todos descritos en una tarjeta de 10x20 centímetros y que ellos debían leer y resolver mentalmente. Los problemas eran de dos tipos: aquellos en los que el segundo y tercer término son iguales (por ejemplo, “18+9-9") y que llamaremos problemas inversos, y aquellos en los que esos dos términos son distintos (por ejemplo, ”18+13-7") y que llamaremos problemas estándar. La experiencia no consideraba ninguna actividad de trabajo cooperativo, presentándoseles los problemas por separado, y se cuidó de que no hubiera difusión de información entre los estudiantes.

Los niños se asignaron aleatoriamente a dos grupos. El grupo mixto y el grupo bloqueado. En el grupo mixto, en todas las primeras siete sesiones, a los estudiantes se les presentó una mezcla de diez problemas estándar y diez problemas inversos. En cambio, en el grupo bloqueado en las sesiones dos, tres, cuatro y seis se les presentaron sólo problemas inversos. En el resto de las sesiones se les presentó una mezcla de problemas similar a la del grupo mixto.

A cada estudiante y para cada ensayo se le registró el tiempo de ejecución, la precisión de la respuesta, y la explicación que el estudiante entregaba justo después de haber entregado la respuesta. Siegler y Stern clasificaron las estrategias utilizadas por los estudiantes en cinco tipos. La estrategia “Computación” que era la de sumar los dos primeros números y luego restar el tercero de la suma. Esta corresponde a una estrategia básica, que normalmente toma como 12 segundos, pero en el caso de un problema inverso es poco inteligente. Otra estrategia es la que llamaron “Atajo”. En el caso de un problema inverso, esta estrategia corresponde a dar como respuesta el primer número. Los tiempos de respuesta son cercanos a los tres segundos, y la explicación que el estudiante entrega es que el segundo y tercer número se anulan. Otra estrategia es “Atajo Inconsciente” que es similar a la estrategia “Atajo” pero donde el estudiante no es capaz de dar una explicación. Finalmente, según Siegler y Stern está la estrategia que llaman “Negación” en la que en un problema inverso se suman los dos primeros números, luego se interrumpe y se entrega como solución el primer número, y la estrategia “Atajo computacional” que es similar a la de Negación pero en la que la interrupción se realiza cuando se está haciendo la suma de los dos primeros números, antes de terminar. En estas dos últimas estrategias la explicación entregada es adecuada y los tiempos de respuesta son cercanos a 10 segundos.

En la octava sesión a ambos grupos se les presentaron 48 problemas, ocho de cada uno de los siguientes seis tipos: a+b-b, a-b+b, a+b-a, a-b-b, a+b+b, y a-b+a. La idea era ver si podían generalizar las estrategias utilizadas en las primeras siete sesiones y si cometían equivocaciones.

Principales comportamientos observados

Los principales hallazgos en el comportamiento de los estudiantes que encontraron Siegler y Stern y que el modelo debe intentar reproducir son los siguientes:

- Cada estudiante usó varias estrategias, y aún cuando los estudiantes cometieron muy pocos errores sin embargo fueron mejorando sus tiempos de respuesta.
- Durante las primeras siete sesiones se observa una tendencia bien definida, en la cual en la primera sesión los estudiantes utilizan principalmente la estrategia "Computación", y aún cuando hay bastante variabilidad entre individuos, sólo dos patrones emergen en el resto de las sesiones. Uno es el patrón del grupo mixto y el otro es el patrón del grupo bloqueado.
- En ambos patrones, la estrategia "Atajo" es crecientemente utilizada después de descubierta. Además es descubierta mucho antes y mucho más utilizada en el grupo bloqueado que en el grupo mixto. Sin embargo, hay una caída transiente de su uso en las sesiones quinta y séptima.
- En cada sesión la distribución de frecuencia de uso de las estrategias sigue un patrón tipo "ondas sobrepuestas", y en la que la frecuencia de uso de la estrategia "Computación" es alta al principio pero va decayendo a medida que avanza la sesión.
- El patrón típico de descubrimiento es el siguiente: "Computación", luego "Negación", luego "Atajo Inconsciente", y posteriormente "Atajo", y donde la estrategia "Atajo Computacional" es a veces descubierta antes del "Atajo" y a veces después.
- En el grupo mixto la frecuencia de uso de la estrategia "Negación" es alta, mientras que el grupo bloqueado es baja, excepto en las sesiones mixtas (la primera, quinta y séptima). Es decir, la estrategia "Negación" parece ser seleccionada solamente en las sesiones donde hay una mezcla de problemas inversos con estándares.
- La estrategia "Atajo Inconsciente" es utilizada con alta frecuencia en el grupo bloqueado, en particular en la segunda sesión. En el grupo mixto, en cambio, el uso de esta estrategia es mucho menos frecuente.
- La estrategia "Atajo Computacional" no es muy usada, pero es más frecuente en el grupo mixto que en el bloqueado.
- En la octava sesión los niños en el grupo bloqueado utilizaron más la estrategia "Atajo" en problemas donde era aplicable que en el grupo mixto (65% en el grupo bloqueado versus 35% en el grupo mixto), pero también la utilizaron más cuando no era apropiada (66% en el grupo bloqueado versus 28% en el mixto).

La mayoría de estas características están representadas en la figura de Siegler y Stern adjunta.

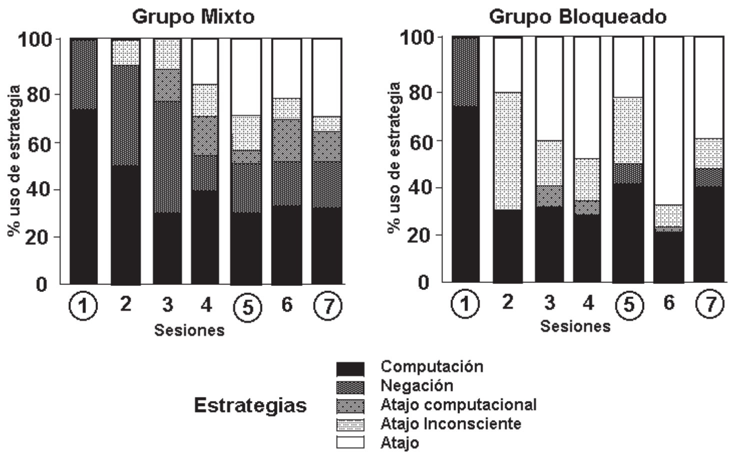

Figura 17: Resultados experimentales obtenidos por Siegler y Stern.

Es importante considerar que esta figura muestra la frecuencia de uso sólo en los problemas que eran inversos. Por lo tanto, en el grupo bloqueado en las sesiones 2,3,4 y 6, los datos corresponden a los primeros diez problemas de cada sesión, mientras que en el grupo mixto y en ambos grupos pero en las sesiones 1, 5 y 7, los datos corresponden a problemas que pueden haberse dado en cualquier posición entre la primera y vigésima.

Descripción del modelo

Pasemos ahora a describir el modelo propuesto. El modelo es un sistema dinámico adaptativo que está centrado sobre la noción de estrategia. Una estrategia es modelada como una secuencia de actos motores elementales, del tipo de los de Rizzolati y Gallese. Por ejemplo, concentrar la atención visual en un número de los tres que tiene cada problema; mover la atención visual hacia la derecha o hacia la izquierda de la posición en que actualmente está apuntando; o acciones motoras aritméticas, tal como sumar o restar dos números que están en memoria de trabajo. La suma y la resta se suponen que ya son acciones dominadas por el estudiante. Sin embargo, estas operaciones pueden, a su vez, utilizar alguna de varias estrategias posibles. Por ejemplo, actos motores con los dedos para sumar, secuencias de actos para mover y agrupar objetos con las manos, o actos para recuperar resultados de memoria de largo plazo. Por esta razón, los tiempos y probabilidades de errores de suma y resta varían según cuáles sean los números y estrategias usadas.

En nuestro modelo la estrategia "Computación" es la siguiente secuencia de actos: apuntar la atención visual al extremo izquierdo del problema "a+b-c" cargando en memoria de trabajo aritmética el número en esa posición, luego mover la atención visual una posición a la derecha cargando el número en esa posición en el primer lugar de la memoria de trabajo aritmética, luego sumar los dos números más recientes en memoria de trabajo aritmética (este acto puede ser a su vez una larga secuencia) dejando en primer lugar de la memoria de trabajo aritmética el resultado de la suma, luego mover la atención visual una posición a la derecha cargando el número en esa posición en el primer lugar de la memoria de trabajo aritmética, y, finalmente, restar el número más reciente en memoria de trabajo aritmética del anteriormente cargado y dejar el resultado en el primer lugar de la memoria de trabajo aritmética. La figura siguiente ilustra en forma esquemática esta secuencia de actos.

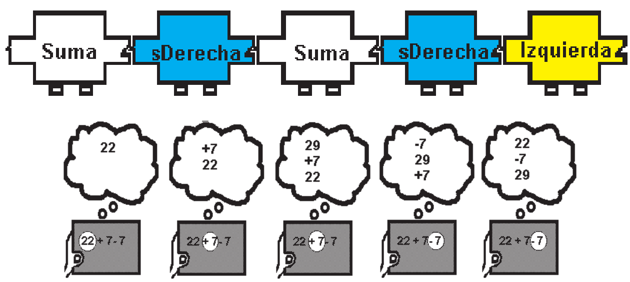

Figura 18: a) Secuencia de actos que conforman la estrategia “Computación” (leído desde la derecha a izquierda pues es una composición de operadores). Es decir, primero actúa Izquierda (enfocar atención en extremo izquierdo de la tarjeta con el problema “a+b-c”), luego shift Derecha, luego Suma, luego shift Derecha y finalmente Suma.
b) Abajo está (de izquierda a derecha) la secuencia respectiva de locaciones de la atención visual sobre la tarjeta y dentro de las nubes se ilustra la activación correspondiente de la memoria de trabajo aritmética.

Más adelante veremos cómo queda la estrategia “Atajo” y cómo se obtiene de mutaciones, combinaciones y eliminación de redundancia de los actos de la estrategia “Computación”. También proponemos que el resto de las estrategias no son estrategias propiamente tal, sino que la “Negación” y el “Atajo Computacional” corresponden a la estrategia “Computación” pero interrumpida y continuada con la estrategia “Atajo”, y que “Atajo Inconsciente” es sólo la estrategia “Atajo” pero con un nivel de activación menor a un cierto valor umbral.

El modelo es básicamente un sistema de selección de estrategias. La selección se realiza después de que detectores de características perceptuales visuales se han activado. Los detectores son del tipo siguiente: que dos de los tres números son iguales, o que “b” es igual a “c”. La activación de detectores desencadena diferentes niveles de intensidad para las diferentes estrategias almacenadas en memoria de largo plazo. Las intensidades dependen de memorias de los desempeños previos de las estrategias (precisión y velocidad de respuesta) así como del grado de novedad de cada estrategia para problemas con características perceptuales similares al problema del ensayo presentado en ese momento. De esta forma, frente a cada ensayo y de acuerdo a las características perceptuales detectadas del problema presentado al sujeto, una lista de estrategias con sus correspondientes intensidades son activadas, y, posteriormente, el mecanismo de selección escoge una estrategia con probabilidad proporcional a su intensidad.

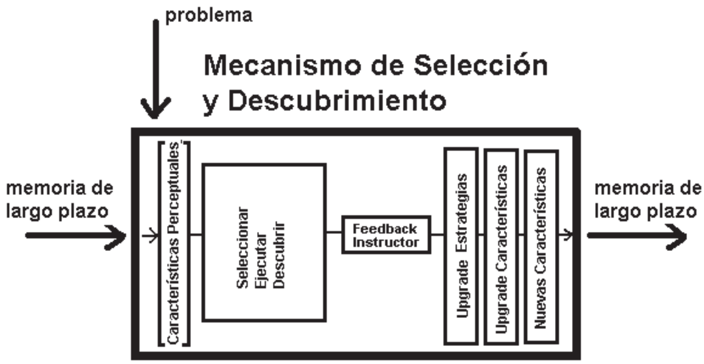

Figura 19: Esquema del modelo. Todo lo que hace es modificar memorias de largo plazo debido a la resolución reiterada de problemas. Cada vez parte por detectar características perceptuales del problema, luego selecciona una estrategia y la ejecuta, y luego según el feedback del instructor y propio ajusta los acumuladores de desempeño de las estrategias.

Sin embargo, estas intensidades son también influidas por intensidades recientes almacenadas en memoria. Proponemos tres mecanismos de influencia o inercia. Cada uno de ellos es un mecanismo de alteración hacia y desde otras intensidades recientemente activadas y que de alguna forma se vuelven a activar. Los tres mecanismos son: alteración debida a intensidades del ensayo anterior, alteración debida a intensidades de otras locaciones de atención visual y alteración debida a intensidades provenientes de lo ocurrido en la sesión anterior.

Primero veamos la alteración proveniente del ensayo anterior. Esta corresponde al hecho de que el vector de intensidades de estrategias activado para ese ensayo no se desvanece completamente, y, por lo tanto, logra afectar al vector de intensidades de estrategias en el ensayo actual. Una proporción de las diferencias entre las intensidades de las estrategias activadas del problema anterior y las intensidades promedios, es adicionada a las intensidades del ensayo actual. Esta modificación de las intensidades originalmente calculadas para este ensayo explica porqué en una sesión con una mezcla de problemas estándares e inversos hay más uso de las estrategias “Computación” y “Negación” para problemas inversos que en una sesión en la que sólo existen problemas inversos. De alguna forma este mecanismo de influencia es una inercia que arrastra activaciones desde el ensayo anterior.

Ahora veamos la alteración desde otras locaciones de la atención visual. Esta alteración corresponde al hecho de que la intensidad de cada estrategia cuando se enfoca la atención en un número, por ejemplo en el número “a” en “a+b-c”, es influenciada por la intensidad de esa estrategia pero asociada al enfoque de la atención visual en “b” o en “c”. Esto significa, por una parte, que no hay una, sino que tres intensidades por estrategia: una asociada a la atención visual en “a”, otra asociada a la atención visual en “b” y otra asociada a la atención visual en “c”. Por ejemplo, la intensidad de la estrategia “Atajo” cuando se enfoca la atención visual en “b” es computada utilizando los tiempos de respuesta, precisiones y grado de novedad de la estrategia "Atajo" cuando ésta ha sido utilizada comenzando en "b", y el efecto de influencia significa que esta intensidad originalmente calculada es modificada por el vector de intensidades para "a" y "c", aún cuando en ese preciso momento el sujeto está enfocando su atención sólo en "b".

Este efecto de alteración junto con el proceso de interrupción, que se describirá más adelante, ayudan a explicar el aumento repentino y pronunciado del uso de la estrategia "Atajo" en las sesiones bloqueadas, y el uso con mucho mayor frecuencia de la estrategia "Negación" en las sesiones mixtas. La explicación es la siguiente: la estrategia "Atajo" es descubierta cuando la atención visual está ubicada sobre "b". Así, la intensidad de la estrategia "Atajo" cuando se fija la atención en "b" es alta, pero es muy baja cuando se fija en "a", y por lo tanto, la estrategia "Atajo" sería seleccionada sólo cuando la atención visual se fije en "b". Todo esto significa que existirá cierto uso de la estrategia "Negación" hacia el final de la primera sesión, ya que hacia al final de esa sesión se descubre la estrategia "Atajo" y dado que modelamos la estrategia "Negación" como el uso de la estrategia "Computación" interrumpida cuando la atención visual está sobre "b" y en ese instante se selecciona la estrategia "Atajo". Sin embargo, el proceso de alteración recién descrito tendrá el efecto de aumentar la intensidad de la estrategia "Atajo" para la locación "a", en una forma similar a un proceso de difusión de intensidades. El proceso de difusión será más rápido sólo en sesiones con sólo problemas inversos, y por lo tanto la intensidad de la estrategia "Atajo" para "a" rápidamente será suficientemente alta como para que esa estrategia sea seleccionada al comienzo del ensayo (que parte enfocando en "a"). Esto es lo que pasa justamente en la segunda sesión del grupo bloqueado. Por el contrario, en una sesión mixta, la difusión será lenta, permaneciendo la intensidad de la estrategia "Atajo" más localizada en "b". Por lo tanto, después de un par de ensayos, cuando suficientes recursos atencionales sean liberados, la estrategia "Atajo" será seleccionada cuando la atención visual se fije en "b". Esto generará una alta frecuencia de uso de la estrategia "Negación".

Los supuestos propuestos sobre atención visual y su rol en el proceso de selección y descubrimientos no son arbitrarios. Hay antecedentes y evidencia empírica similares en otras tareas cognitivas. Por una parte, el hecho que el sistema cognitivo utilice índices espaciales asociados a la atención visual y el sistema oculomotor, ha sido estudiado, por ejemplo, por Daniel Richardson y Michael Spivey, quienes han mostrado cómo memorias de atención visual de figuras en una locación generan movimientos hacia esas locaciones en tareas en las que es necesario recordar las figuras. Por otra parte, antecedentes sobre la noción de difusión pueden encontrarse, por ejemplo, en la revisión de Staddon de diferentes propuestas de sistemas dinámicos del comportamiento humano y animal en tareas de aprendizaje espacial y navegación.

Ahora veamos la tercera alteración: la influencia de la sesión anterior. Esta se efectúa a través de la lista de intensidades producto de todo lo que pasó en la sesión anterior. Esta es una lista de intensidades, que llamaremos "intensidades entre sesiones", que se alteran sólo de sesión en sesión, y que poseen su dinámica propia. Esa dinámica tiene dos componentes. Por una parte, hay un decaimiento natural de sesión en sesión, y, por otra parte, un término forzante la altera, en un proceso que sintetiza los resultados obtenidos a través de toda la sesión e introduce esa síntesis en la intensidad entre sesiones. Ahora que conocemos la dinámica de esta intensidad, veamos cómo esto afecta la intensidad que se está utilizando para el ensayo actual. Una proporción de la intensidad entre sesiones se adiciona a la intensidad del problema presentado en ese momento. Este mecanismo de alteración explica por qué en cada sesión hay un uso más frecuente de la estrategia "Computación" (aún en problemas inversos) en los primeros ensayos que en los últimos ensayos de la sesión. Adicionalmente, el proceso de olvido de la dinámica entre sesiones significa que en las últimas sesiones la intensidad entre sesiones de la estrategia "Atajo" crece, y, por lo tanto, la frecuencia de uso de la estrategia "Computación" en los primeros ensayos de las últimas sesiones es menor que en los primeros ensayos de las primeras sesiones.

Aparte de los tres mecanismos de alteración de las intensidades de las estrategias activadas, el modelo contiene varios otros procesos: el de interrupción de secuencias en ejecución, el de creación de nuevas estrategias, el de acceso a trazas de actos reportables y que da lugar a estrategias explícitas versus implícitas, y los procesos de ajuste de las memorias de largo plazo como producto de retroalimentaciones. Veamos estos procesos en más detalle.

Comencemos con el proceso de interrupción. Hemos revisado la importancia para la cognición de poder interrumpir una secuencia de acciones en ejecución y que esa capacidad estaría regulada por los ganglios basales, que son parte de nuestro cerebro reptil. En el presente modelo, suponemos que mientras se ejecuta la secuencia de acciones que componen una estrategia, un mecanismo paralelo puede decidir interrumpirla. Para poder interrumpir debe disponer de suficientes recursos atencionales. Si está ejecutando una estrategia que no domina, entonces no dispone de suficientes recursos para asignarlos a otras actividades. Sin embargo, en la medida que ha ejecutado muchas veces una estrategia comienza a liberar recursos haciendo posible interrupciones. Las interrupciones se originan debido a nueva información que se está procesando paralelamente y que puede activar una o más intensidades más allá de un cierto nivel. Esto puede dar lugar, a la simple selección de otra estrategia, o a la ejecución de una nueva estrategia recientemente creada.

El proceso de creación de nuevas estrategias es el producto de un mecanismo paralelo de metacognición, en el que se simula mentalmente nuevas combinaciones de actos y reducción de redundancias para generar así nuevas estrategias. Es un mecanismo de generación de nuevas ideas similar al formulado por el matemático Jaques Hadamard en un libro clásico sobre el pensamiento matemático escrito en 1944 y a las ideas de algoritmos genéticos propuestos por John Holland. Por ejemplo, la estrategia "Atajo" es obtenida de la estrategia "Computación" en dos pasos. El primer paso es la inserción de una secuencia de tres acciones en la secuencia correspondiente a la de "Atajo". Esto crea una secuencia alargada de actos. Pero la secuencia alargada contiene ahora redundancias. Así, el segundo paso es la eliminación de la redundancia detectada. Finalmente un filtro "grueso", testea la nueva secuencia recién creada. Este filtro chequea que la nueva secuencia utilice los tres números "a", "b" y "c", y que no sean usado más de una vez. En varios estudios experimentales en otras operaciones aritméticas por niños pequeños, Robert Siegler ha mostrado que este tipo de filtro está presente.

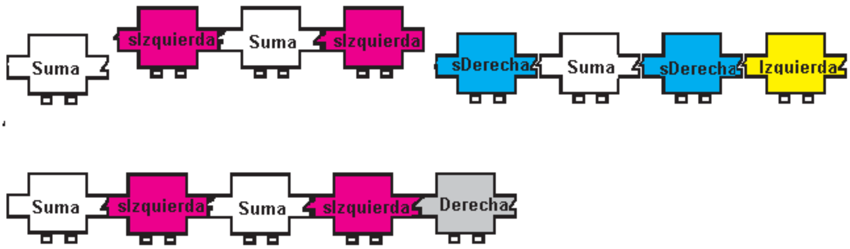

Figura 20: Creación de la estrategia “Atajo” a partir de la estrategia “Computación”:

(a) inserción de la secuencia “shift Izquierda, Suma, shift Izquierda”

(b) eliminación de redundancia eliminando la primera Suma (la de más a la derecha) y sustituyendo secuencia “Izquierda, luego shift Derecha, luego shift Derecha” por Derecha

Veamos ahora el proceso de reportabilidad de estrategias utilizadas. El modelo concibe la estrategia inconsciente como debido a una baja activación de todas las acciones aritméticas que componen la secuencia. No se incluyen las activaciones de las acciones de cambio de atención visual dado que ellas además de muy rápidas raramente son verbalizables. El nivel de activación está definido como el producto entre el tiempo de ejecución de la acción que toma más tiempo dentro de las acciones de la estrategia, y un nivel de intensidad de esa estrategia. Dado que la estrategia “Computación” siempre toma bastante tiempo, nunca genera un nivel bajo de activación. Sin embargo, la estrategia “Atajo” cuando no ha sido utilizada muchas veces es proclive a tener bajo nivel de activación, y por lo tanto dificulta el acceso a conocer qué acciones se efectuaron. Esto genera los patrones conductuales típicos del “Atajo inconsciente”.

Finalmente veamos el proceso de ajuste de las memorias de largo plazo. Las memorias contienen acumuladores de los desempeños de las diferentes estrategias según el tipo de características perceptuales de los problemas a los que el sujeto ha sido sometido. Por lo tanto, justo después de que el sujeto entrega la respuesta y obtiene retroalimentación del instructor sobre la corrección o no de la respuesta y considerando el tiempo que le tomó responder, estas informaciones son incorporadas a los acumuladores respectivos.

Hemos presentado una rápida y resumida descripción del modelo. Una descripción más detallada y completa se presentará en otro artículo. Lo importante es observar que todo el modelo es un sistema dinámico y cuyo “estado” representa principalmente las memorias de largo plazo del sujeto. La dinámica contiene dos componentes. Por una parte está la dinámica propia, autónoma, que representa la actividad que siempre está sucediendo independiente de estímulos. La otra componente es la que da cuenta del impacto de los estímulos externos. Estos corresponden a los problemas que el sujeto enfrenta en cada ensayo así como la retroalimentación proveniente del instructor acerca de si la respuesta estuvo correcta y los tiempos de respuesta provenientes de un reloj interno propio del individuo.

Al correr ambos grupos con el simulador se obtuvieron los principales fenómenos observados experimentalmente y descritos anteriormente. Los dos gráficos de la figura siguiente ilustran el comportamiento sesión a sesión para ambos grupos.

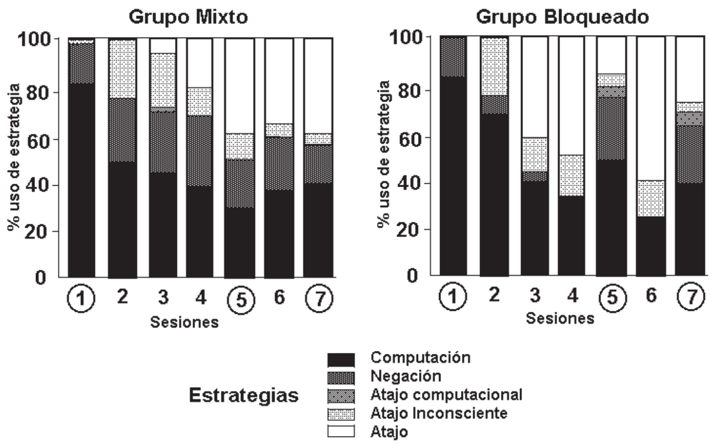

Figura 21: Resultados del simulador

El mayor desacuerdo con los datos experimentales está en la octava sesión. El fenómeno producido en esa sesión depende críticamente del mecanismo de generalización. El mecanismo propuesto de generalización no es todavía definitivo y podría mejorarse.

Algunas predicciones del modelo y que habría que contrastar experimentalmente son las siguientes. Según Lieberman daños en los ganglios basales es común en pacientes con afasia, que muestran no sólo deficiencias en el lenguaje sino que también varias deficiencias cognitivas: deficiencias en la capacidad de planificar, en la de cambiar estrategias en ejecución, en la de formular categorías abstractas y en la de pensar simbólicamente. Por lo tanto, una predicción de este modelo es que estudiantes con afasia deberían mostrar mucho menos interrupciones y por lo tanto les debería costar mucho más descubrir la estrategia "Atajo". Por eso mismo, la frecuencia de uso de las estrategias "Negaciones", "Atajos Computacionales" y "Atajos Inconscientes" debería ser muy baja. Algo similar les debería ocurrir a estudiantes normales pero en condiciones de mucha altitud. Por otra parte, una segunda predicción de este modelo está relacionada a un fenómeno reportado por Stanislas Dehaene. En los ejercicios de comparación de números, cuando los sujetos cometían errores e interrumpían para corregir, Dehaene encontró que se generaba un potencial evocado negativo típico. Es de esperar entonces, que en las interrupciones de secuencias para efectuar correcciones, como las que se producen en las "Negaciones" y "Atajos Computacionales", se pueda medir electroencefalográficamente un potencial similar. Es decir, en electrodos colocados en la superficie frontal externa del cráneo debería poder observarse una señal inhibitoria análoga a la medida por Dehaene.

Finalmente, es importante observar que el modelo propuesto sólo comprende niveles conductuales y cognitivos. Sin embargo, es relativamente fácil conectarlo a los mecanismos neuronales corticales y subcorticales, como los propuestos por Taylor y Taylor para el secuenciamiento de actos.

El modelamiento de esta actividad aritmética nos muestra la punta del iceberg de lo que realmente hay detrás del pensamiento matemático. Una serie de procesos y subrutinas se esconden mientras compiten para generar la secuencia de actos que lleva a resolver un problema. La revisión que hemos presentado de los procesos involucrados es todavía incompleta. Sin embargo, ya nos dejan claro que la visión tradicional del aprendizaje de las matemáticas en la que se suponía que los estudiantes aprendían ordenadamente, tal como en los textos, siguiendo definiciones y axiomas, es en realidad una simplificación demasiado brutal y que está muy lejos de la realidad.

Conclusiones

En este artículo hemos revisado evidencia empírica que nos sugiere que la visión tradicional de cómo ocurre el pensamiento matemático no es una visión sostenible. Hemos analizado siete problemas que nos plantean que contenidos típicamente concebidos como triviales pueden ser muy difíciles, y por el contrario, contenidos supuestamente muy complejos si son presentados adecuadamente pueden ser manejados hasta por preescolares. Además, hemos revisado con cierto grado de detalle una actividad de enseñanza de la aritmética, y hemos presentado un modelo y simulador del proceso de aprendizaje y descubrimiento matemático en esa tarea. La construcción del simulador nos ha obligado a precisar y contrastar experimentalmente los supuestos mecanismos de aprendizaje. El simulador propuesto aquí es muy elemental y es sólo un comienzo, pero apunta en la dirección hacia lo que algún día deberían ser las herramientas tecnológicas de apoyo al profesor en la preparación de sus clases. Tal como con un simulador de un horno o un avión, el usuario algún día podría observar qué pasa frente a diferentes cambios y escenarios, y entonces le permitirá saber con mucho mayor precisión el impacto de las diversas estrategias de enseñanza.

Los antecedentes revisados en este artículo dan lugar a un replanteo de los métodos y contenidos de enseñanza. Mi propuesta no es desechar los métodos tradicionales, sino que ampliar el abanico de estrategias de enseñanza del profesor. Los tipos de actividades, que aquí he propuesto en forma implícita y muy somera, están especialmente diseñados para buscar mejorar una comprensión profunda de la matemática. A mi entender, existen enormes oportunidades para mejorar significativamente la enseñanza de las matemáticas y dotar a nuestros estudiantes de una mejor comprensión de los conceptos matemáticos básicos.

SUMMARY

Nowadays the educational challenge is to teach for understanding. This challenge is particularly valid in mathematics where there is almost a general consensus that students do not understand what they are supposedly learning. But to confront this challenge requires understanding what it means to understand mathematic concepts. How does the brain do it? In this article, the *author has selected experimental evidence that does not concur with the traditional view about education and presents very important recent neurological findings that point towards different mechanisms. Next, he examines a specific mathematic learning activity, carefully measuring dozens of children in a laboratory setting. On the basis of these experimental findings and the supposed mechanisms at play, he proposes a model that explains the behavior observed in the students while completing the activity. Then he transfers the model to a simulator that, in running it with various virtual students, generates behaviors that are reasonably similar to the measurements of the real students. This simulator, on one hand, requires being explicit with all of the hypotheses of this model. On the other hand, it is an indispensable tool for being able to contrast the model with reality. Finally, once a model with a good predictive capacity is obtained, the simulator allows a better plan teaching activities.*

SOMMAIRE

Aujourd'hui, le défi dans l'éducation est d'apprendre pour pouvoir comprendre.

Ce défi est particulièrement vrai en mathématiques où il existe un consensus presque généralisé disant que les étudiants ne comprennent pas ce qu'ils sont censés apprendre. Mais faire face à ce défi exige de comprendre ce que signifie comprendre un concept mathématique.

De quelle façon le cerveau fonctionne t'il? Dans ce travail il y a une évidence expérimentale qui s'oppose à la vision traditionnelle de l'éducation et montre des découvertes neurophysiologiques récentes très importantes qui pointent vers des mécanismes différents. On fait une étude sur une activité d'apprentissage spécifique en arithmétique, mesurée dans un laboratoire avec une dizaine d'enfants. Sur la base des découvertes expérimentales et des mécanismes mis en jeux, l'auteur propose un modèle qui explique le comportement observé chez les étudiants au moment où ils réalisent l'activité cérébrale. Après, le modèle est traduit dans un simulateur, qui au moment de sa mise en marche avec des étudiants virtuels, produit des comportements raisonnablement similaires à ceux mesurés sur des étudiants réels. Ce simulateur, d'un côté, est un outil irremplaçable pour faire une comparaison entre le modèle et la réalité. Et finalement, une fois obtenu le modèle avec une bonne capacité de prédiction, le simulateur permet donc de planifier mieux les activités d'enseignement.

RESUMO

Hoje em dia o desafio educacional é ensinar para a compreensão. Este desafio é particularmente válido na área das matemáticas onde existe quase um consenso generalizado que os estudantes não estão entendendo o que supostamente aprendem. Mas enfrentar este desafio requer entender o quê significa compreender um conceito matemático. Como é que o cérebro o faz?. Neste trabalho seleciona-se evidência experimental não congruente com a visão tradicional que se tem sobre a educação e mostram-se descobrimentos neurofisiológicos recentes muito importantes que apontam a mecanismos diferentes. Logo, examina-se uma atividade de aprendizagem específico em aritmética, cuidadosamente medida no laboratório com dezenas de crianças. Sobre a base desses descobrimentos experimentais e os supostos mecanismos em jogo, propõe-se um modelo que explica o comportamento observado nos estudantes ao realizar a atividade. Logo se traduz o modelo em um simulador que ao corrê-lo com vários estudantes virtuais gera comportamentos razoáveis similares aos medidos nos estudantes reais. Este simulador, por uma parte, obriga a fazer explícito todas as hipóteses deste modelo. Por outro lado, é uma ferramenta insubstituível para poder contrastar o modelo com a realidade. E, finalmente, uma vez obtido um modelo com boa capacidade de predição, o simulador permite, então, planificar melhor as atividades de ensino.

REFERENCIAS

Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.N. y M.A. Laurentiev. *La Matemática: Su Contenido, Métodos y Significado*. Alianza Editorial, 1973.

Araya, Roberto. *Inteligencia Matemática*. Editorial Universitaria, 2000.

——. *Construcción Visual de Conocimientos con Juegos Cooperativos*. AutoMind, 1997.

Beauchamp J. "L' échec des maths à l' école" *Sciece & Vie*, (2001).

Black, Ira. *Life, Death and the Changing Brain*. McGraw Hill, 2001.

Casti, John. *Five More Golden Rules*. John Wiley, 2000.

Cangelosi, Angelo y Steven Hardnard. *The Adaptive Advantage of Symbolic Theft over Sensorimotor Toil: Grounding Language in Perceptual Categories*.

Daly, Martin y Margo Wilson. *The Truth about Cinderella*. Yale University Press, 1998.

Dehaene, Stanislas. *The Number Sense*. Oxford University Press, 1997.

De Waal, Frans. *The Ape and the Sushi Master. Cultural Reflections of a Primatologist*. Basic Books, 2001.

Dugatkin, Alan Lee. *The Imitation Factor: Evolution Beyond the Gene*. The Free Press, 2000.

Fischer, Alvaro. *Evolución... el Nuevo Paradigma*. Editorial Universitaria, 2000.

Gardner, Howard. *The Unschooled Mind*. Basic Books, 1991.

Greenfield, Patricia.

Hadamard, Jacques. *The Mathematician´s Mind* Princeton University Press, 1996.

Hardnard, Stevan. “From sensiromotor praxis and pantomime to symbolic propositions”, The Evolution of Language, Proceedings of the third International Conference, Paris 3-6 April 2000.

Hoffman, Donald. *Visual Intelligence: How we Create What we See*. Norton, 1998.

Holland, John *Emergence: From Chaos to Order.* Addison-Wesley, 1998.

——. *Adaptation in Natural and Artifitial Systems*. Mit Press, 1992.

Johnson-Laird, P.N. “Illusions and models: a reply to Barrouillet and Lecas”. Cognition 76, 2000.

Johnson-Laird, Philip y Ruth Byrne. “Précis of Deduction”. Behavioral and Brain Sciences 16 , 1993.

Kaput, James. “On the Development of Human Representational Competence from an Evolutionary Point of View: from Episodic to Virtual Culture”. Dept. of Mathematics. U. of Massachusetts.

Lackoff, George & Núñez, Rafael. *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*. Basic Book, 2000.

Kosslyn, Steven y Oliver Koenig. “Wet Mind: The New Cognitive Neuroscience”. Free Press, 1995.

Lieberman, Philip. “Human Language and our Reptilian Brain: The subcortical Bases of Speeech, Syntax, and Thought”. Harvard University Press, 2000.

Llinás, Rodolfo. *I of the Vortex: From Neurons to Self.* MIT Press, 2001.

Ma, Liping. *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*. Lawreance Erlbaum, 1999.

Maynard-Smith, John y Eors Szathmary. *The Origins of Life: From the Birth of Life to the Origins of Language*. Oxford University Press, 2000.

McLuhan, Marshall. *La Galaxia Gutenberg: Génesis del Homo Typographicus*. Aguilar, 1969.

Miller, Geoffrey. *The Mating Mind* Doubleday, 2000.

Miyashita, Yasushi. “Visual Associative Long Term Memory: Encoding and Retrieval in Inferotemporal Cortex of the Primate”. *The New Cognitive NeuroSciences*, MIT Press, 2000.

Nowak, Martin; Plotkin, Joshua and Vincent Jansen. “The Evolution of syntactic communication”. *Nature* 404, (2000).

Richardson, Daniel and Michael Spivey. “Representation, Space, and Hollywood Squares: looking at things that aren´t there anymore”. Cognition 76 (2000) 269-295.

Pinker, Steven. “Survival of the clearest” *Nature* 404, (2000).

Rizzolatti, Giacomo; et al. “Neurophysiological Mechanisms Underlying the Understanding and Imitation of Action”. *Nature* 2, (2001).

Schmandt-Besserat, Denise. *How Writing Came About.* University of Texas Press, 1996.

Shepard, Roger. *Mind Sights.* Freeman & Co., 1990.

Siegler, Robert. *Emergent Minds: The Process of Change in Children´s Thinking*. Oxford Univ. Press, 1996.

Siegler, Robert y Elsbeth Stern. “Conscious and Unconscious Strategy Discoveries: A Microgenesis Analysis”. *Journal of Experimental Psychology: General*, 127 - 4 (1998).

Staddon, J.E.R. “Adaptive Dynamics: The Thoeretical Analysis of Behavior”. MIT Press, 2001.

Taylor, N.R. y J.G. Taylor. “Hard-Wired Models of Working Memory and Temporal Sequence Storage and Generation”. London: Dept. of Mathematics. King´s College.

Vanlehn, Kurt. *Mind Bugs: The Origins of Procedural Misconceptions*. MIT Press, 1990.

Wittgenstein, Luwig. *Gramática Filosófic*a. UNAM 1992.

✦✦✦✦✦✦✦✦

La figura 1 es tomada del libro Mind Sights de Roger Shepard publicado por Freeman & Co. 1990.

La figura 13 es tomada del libro “Visual Intelligence” de Donald Hoffman, publicado por Norton & Co, 1998.

La Figura 17 es adaptada del artículo de Siegler & Stern “Conscious and Unconscious Strategy Discoveries: A Microgenesis Analysis”. Journal of Experimental Psychology: General, Vol. 127, Num. 4, 1998.